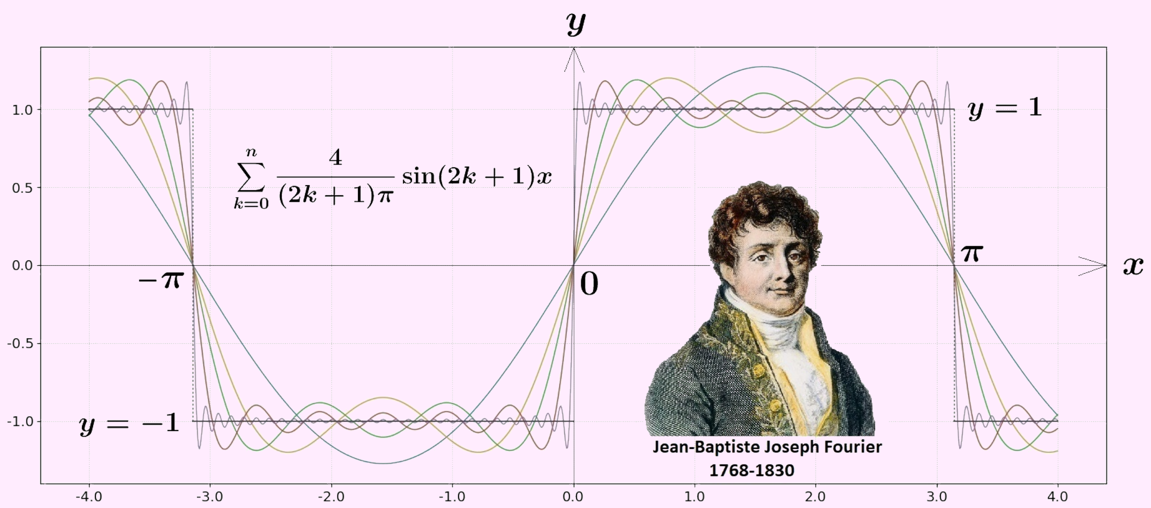
הטכניון מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה

סמי זעפרני
אלן פינקוס

טורי פוריה
והתמרות אינטגרליות



Fourier Series and Integral Transforms

מהדורה אלקטרונית - פברואר 2024
https://samyzaf.com

הקדמה

מטרת ספר זה היא להקנות לקורא ידע בסיסי ויכולת טכנית בנושא טורי פוריה וההתמרות האינטגרליות של פוריה ולפלס. טורי פוריה (וגם טורי חזקות) הם הדוגמאות החשובות ביותר של טורים שימושיים של פונקציות. יישומים רבים של טורי פוריה ניתן למצוא בשטחים שונים ומגוונים.

קיימות התמרות אינטגרליות רבות ושונות. ההתמרות של פוריה ושל לפלס מהוות אב טיפוס להתמרות אינטגרליות כלליות, והן גם הידועות והשימושיות שבהן.

טורי פוריה והתמרות אינטגרליות מתבססים מבחינה תאורטית על מזיגה טבעית של מושגים מתחום האלגברה הליניארית עם מושגים מתחום החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. כלומר, מדובר בשילוב של אלגברה עם אנליזה. אנו מניחים כי הקורא מתמצא בצורה יסודית בשני תחומים אלה אך בכל זאת מביאים (בעקר בפרק 1) חזרה תמציתית על כמה מן המושגים והעובדות היסודיות מתחום האלגברה הליניארית.

הדרך הטובה, היעילה, וכמעט היחידה, ללימוד מתמטיקה היא בשינון החומר יחד עם פתרון תרגילים. בסוף כל סעיף, כמעט, נכללה קבוצת תרגילים. ישנה גם קבוצת תרגילים כלליים יותר בסוף כל פרק. הבנה כוללת ומעמיקה של החומר תלויה מאוד בכמות התרגילים אותם פותר התלמיד.

ספר זה הוכן עבור הקורס "טורי פוריה והתמרות אינטגרליות" (מספר 104214), הניתן על ידי הפקולטה למתמטיקה בטכניון לסטודנטים בפקולטות לפיסיקה, מדעי המחשב, הוראת המדעים, אך בעקר לסטודנטים בפקולטה להנדסת חשמל, שם זהו קורס חובה לסמסטר ג'. קורס זה, של שעתיים הרצאה ושעת תרגול במשך סמסטר אחד, ניתן כבר שנים רבות ללא ספר מתאים. על מנת לתקן מצב זה, ראתה הפקולטה למתמטיקה לנכון לעודד את המחברים להשלים ספר זה.

רוב הסטודנטים לומדים קורס זה במקביל לשני הקורסים "פונקציות מרוכבות" ו־"משוואות דיפרנציאליות חלקיות". קיים גם קשר מסוים בין החומר הנלמד בשלושת הקורסים. למשל, בנושא של התמרת פוריה, לא ניתן להביא דוגמאות המבוססות על משפט הרזידואום אשר עוד לא נלמד בקורס "פונקציות מרוכבות".

ברצוננו להודות לכל האנשים שעזרו לנו בהכנת והגהת ספר זה. כמובן אנו נשארים אחראיים לכל השגיאות שנותרו.

אנו מקווים מאוד שהחומר מובא בצורה שתאפשר לך, הקורא, ללמוד אותו בצורה יעילה ומעמיקה. אנו מאחלים לך הצלחה בנסיון זה.

סמי זעפרני, אלן פינקוס

תוכן עניינים

פרק 0

סימונים ומונחים

0.1 מושגים יסודיים בתורת הקבוצות

אנו מניחים כי הקורא מתמצא היטב ביסודות הראשונים של תורת הקבוצות עליהם מתבסס ספר זה. לכן רק נציג כמה מהסימונים וההגדרות הדרושים לנו.

תורת הקבוצה הכללית מטפלת בכל סוגי הקבוצות האפשריות, אך האנליזה המתמטית הנלמדת בקורסים ללימודי תואר ראשון מטפלת בדרך כלל בקבוצות של מספרים ממשיים או מרוכבים ובקבוצות של פונקציות ממשיות או מרוכבות. אוסף העצמים מהם מורכבת הקבוצה נקראים **האיברים** של הקבוצה, והם מסומנים בדרך כלל ע"י אותיות קטנות: a, b, c, $\ldots$ אם a הוא עצם השייך לקבוצה A אזי נאמר כי a הוא **איבר של** A ונרשום $A \ni a$. אם b **אינו** איבר של A אזי נרשום $b \notin A$.

את הקבוצה A אשר איבריה הם המספרים -6, $3+i$, $5i-2$, ו־7 נתאר כך:

$$A = \{-6,\ 3+i,\ 5i-2,\ 7\}.$$

באופן דומה נוכל לתאר קבוצת פונקציות כגון:

$$B = \{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots,\ \sin 100x\}$$

הכוללת בתוכה בדיוק 100 איברים שכל אחד מהם הוא פונקציה. מלבד קבוצות סופיות, נוכל לתאר גם קבוצות אינסופיות כגון:

$$\{1,\ 1+2x,\ 1+2x+3x^2,\ 1+2x+3x^2+4x^3,\ \ldots\}.$$

בצורה כללית יותר, נתאר קבוצה A באמצעות ביטוי מן הצורה

$$A = \left\{ x \,\middle|\, \phi(x) \right\} \tag{1}$$

כאשר המשתנה x חל על קבוצת עצמים הידועים לנו מראש (כגון מספרים מרוכבים או פונקציות מרוכבות), והביטוי $\phi(x)$ מציין תכונה אשר עשויה להתקיים או לא עבור העצם x (כגון משוואה או יחס סדר). משמעות ההגדרה (1) היא שהקבוצה A היא אוסף כל העצמים x אשר יש להם את התכונה ϕ. למשל נוכל להגדיר

$$.A = \left\{ x \,\middle|\, x^4 - 1 = 0 \right\}$$

אם x חל על מספרים מרוכבים, אז נוכל גם לרשום

$$.A = \{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

לפעמים נוח לבטא את $\phi(x)$ בצורה מילולית כמו בדוגמאות הבאות:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \,\middle|\, \text{הוא מספר שלם אי-זוגי } x \right\} \\ .\mathcal{P}_3 &= \left\{ p \,\middle|\, \text{הוא פולינום ממעלה 3 ומטה } p \right\} \end{aligned}$$

0.2 סימונים מן החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

מספרים שלמים וחיוביים, ז"א המספרים $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, נקראים **מספרים טבעיים**. את קבוצת כל המספרים הטבעיים נסמן ע"י $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, n, \ldots\}$$

כאשר n מסמן מספר טבעי כלשהו. את קבוצת כל המספרים **השלמים** נסמן ע"י $\mathbb{Z}$:

$$.\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

את קבוצת כל המספרים השלמים (כולל 0) האי-שליליים נסמן על ידי $\mathbb{Z}_+$:

$$.\mathbb{Z}_+ = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

ההבדל היחיד בין הקבוצה $\mathbb{Z}_+$ לבין $\mathbb{N}$ הוא בכך שהראשונה מכילה בתוכה את 0 ואילו השניה אינה מכילה את 0. כל מספר מן הצורה $\frac{m}{n}$, כאשר m ו־n הם מספרים שלמים ו־$n \neq 0$, נקרא **שבר** או **מספר רציונלי**. את קבוצת המספרים הרציונליים נסמן על ידי $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, \text{m ו־n מספרים שלמים ו־$n \neq 0$} \right\}.$$

את קבוצת כל המספרים הממשיים נסמן על ידי $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \left\{ x \,\middle|\, \text{x מספר ממשי} \right\}.$$

את קבוצת כל המספרים הממשיים האי-שליליים נסמן על ידי $\mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{R}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq 0 \right\}.$$

את קבוצת כל המספרים המרוכבים נסמן על ידי $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

כל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ ניתן לרשום בצורה $z = x + iy$, כאשר x נקרא **החלק הממשי** של z, ו־y נקרא **החלק המדומה** של z. נסמן $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

במהלך הספר נשתמש בסימונים הבאים עבור קטעים של מספרים ממשיים: לכל שני מספרים ממשיים a, b, נגדיר:

קטע פתוח: $(a, b) = \left\{ x \,\middle|\, a < x < b \right\}$

קטע סגור: $[a, b] = \left\{ x \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\}$

קטע חצי־סגור חצי־פתוח: $[a, b) = \left\{ x \,\middle|\, a \leq x < b \right\}$

קטע חצי־פתוח חצי־סגור: $(a, b] = \left\{ x \,\middle|\, a < x \leq b \right\}$.

כל הקבוצות האלה מתאימות לקטעים **סופיים** של הישר הממשי. ישנם גם קטעים **אינסופיים**. לכל מספר ממשי a נגדיר ארבעה סוגי קטעים כאלה.

חצי־ישר ימני פתוח: $(a, \infty) = \left\{ x \,\middle|\, a < x \right\}$

חצי־ישר ימני סגור: $[a, \infty) = \left\{ x \,\middle|\, a \leq x \right\}$

חצי־ישר שמאלי פתוח: $(-\infty, a) = \left\{ x \,\middle|\, x < a \right\}$

חצי־ישר שמאלי סגור: $(-\infty, a] = \left\{ x \,\middle|\, x \leq a \right\}$.

את קבוצת המספרים הממשיים עצמה מקובל לתאר גם באופן הבא

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \left\{ x \,\middle|\, -\infty < x < \infty \right\}$$

כאשר הסימן ∞ מציין "אינסוף" באופן סימלי בלבד.

נזכיר כי פונקציה $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ נקראת **רציפה למקוטעין** אם יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות ואם, בנוסף לכך, בכל נקודת אי-רציפות קיימים הגבולות החד־צדדיים (הגבול הימני והגבול השמאלי). נדגיש כי במונח "נקודת אי-רציפות" אנו כוללים גם את האפשרות שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה זו. כל פונקציה f כנ"ל ניתן להציג בצורה

$$f = u + iv$$

כאשר u ו־v הן פונקציות ממשיות רציפות למקוטעין בקטע $[a, b]$. הפונקציה u נקראת **החלק הממשי** של f ורושמים $u = \mathrm{Re}(f)$. הפונקציה v נקראת **החלק המדומה** של f ורושמים $v = \mathrm{Im}(f)$. על ידי $C[a, b]$ נסמן את מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, ועל ידי $E[a, b]$ נסמן את מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.

0.3 נוסחאות טריגונומטריות שימושיות

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\alpha = \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) \qquad \tan\alpha = \cot(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\\ \sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha\\ \sin^3\alpha &= \tfrac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)\\ \sin^4\alpha &= \tfrac{1}{3}(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha\\ \cos^3\alpha &= \tfrac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)\\ \cos^4\alpha &= \tfrac{1}{3}(3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)\end{aligned}$$

פרק 1
רקע כללי: מרחבי מכפלה פנימית

הנושאים העיקריים בהם נעסוק בפרק זה הם מערכות אורתונורמליות ואורתוגונליות בתוך מרחב וקטורי בעל מכפלה פנימית, ובמושגים השונים הקשורים לכך. נושאים אלה כלולים לפעמים בחומר הרגיל הנלמד בקורס אלגברה ליניארית. חשיבות מרכזית יש לנושא מערכות אורתונורמליות אינסופיות, המובא בסוף הפרק, אשר אליו קשורות התוצאות בפרק השני (טורי פוריה). ארבעת הסעיפים הראשונים של פרק זה מהווים חזרה תמציתית על כמה מן המושגים והעובדות היסודיות מתחום האלגברה הליניארית הדרושים לנו כדי לפתח את הנושאים השונים בספר זה. לכך עשוי הקורא למצוא בסעיפים אלה עזר רב לרענון ידיעותיו בנושא.

1.1 מרחבים ליניאריים ומרחבי מכפלה פנימית

המבנה האלגברי הבסיסי הדרוש לנו הוא המרחב הליניארי מעל שדה סקלרים (או המרחב הוקטורי כפי שהוא נקרא לרוב). שדה הסקלרים שלנו F יהיה תמיד שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ או שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$. כזכור, איברים של מרחב ליניארי נקראים **וקטורים** (vectors). מבחינה פורמלית, קבוצה לא ריקה V נקראת **מרחב ליניארי** (linear space) מעל השדה F אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. **חיבור וקטורים:** קיימת פעולת חיבור על V שמסומנת בדרך כלל "$+$" כך שלכל שני וקטורים $u, v \in V$, הסכום $u + v$ הוא וקטור השייך ל־V.
2. **אסוציאטיביות החיבור:** לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. **וקטור האפס:** קיים וקטור ב־V המסומן $\vec{0}$ והנקרא "וקטור האפס" כך שלכל $v \in V$ מתקיים $\vec{0} + v = v$.
4. **וקטור נגדי:** לכל וקטור $v \in V$ קיים וקטור המסומן $-v$ והנקרא "הוקטור הנגדי של v" כך ש־$v + (-v) = \vec{0}$.
5. **כפל בין סקלר ווקטור:** ניתן להכפיל כל וקטור $v \in V$ על ידי סקלר $a \in F$ ולקבל וקטור $av \in V$.
6. **קומוטטיביות:** לכל $u, v \in V$ מתקיים $u + v = v + u$.
7. לכל סקלר $a \in F$ ולכל $u, v \in V$: $a(u + v) = au + av$.
8. לכל $a, b \in F$ ולכל $u \in V$ מתקיים $(a + b)u = au + bu$ וגם $a(bu) = (ab)u$.
9. עבור סקלר היחידה 1 של F ועבור כל וקטור $v \in V$: $1 \cdot v = v$.

אם V הוא מרחב ליניארי מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ אז נקרא לו **מרחב ליניארי ממשי**, ואם V מרחב ליניארי מעל שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ אז נקרא לו **מרחב ליניארי מרוכב**. תת־קבוצה $W \subseteq V$ נקראת **תת־מרחב ליניארי** (linear subspace) של המרחב V אם היא מקיימת את כל התנאים הנ"ל מעל אותו שדה סקלרים של V. תנאי ידוע לבדיקה אם W היא תת־מרחב של V הוא: $W \neq \emptyset$ ולכל $u, v \in W$ ולכל $a, b \in F$ מתקיים $au + bv \in W$. ניתן לבטא תנאי זה במילים: W הוא תת־מרחב ליניארי של V אם ורק אם W תת־קבוצה לא ריקה של V הסגורה תחת חיבור וקטורים ותחת כפל וקטור בסקלר. כל מרחב ליניארי מעתה ואילך הוא מרוכב אלא אם כן נציין אחרת במפורש. נסקור עכשיו עוד מספר מושגים חשובים הקשורים למושג המרחב הליניארי.

הגדרה 1.1: יהי V מרחב ליניארי ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$. וקטור u נקרא **צירוף ליניארי** של הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$ אם קיימים סקלרים $a_1, \ldots, a_n \in F$ כך ש־

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

קבוצת כל הוקטורים u שהם צירוף ליניארי של הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$ מסומנת על ידי $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

כזכור, $W = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ הוא התת־מרחב הליניארי של V **הנפרש** על ידי קבוצת הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$. נאמר גם כי הקבוצה $\{v_1, \ldots, v_n\}$ פורשת את W.

הגדרה 1.2: יהי V מרחב ליניארי. קבוצה סופית של וקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראים **בלתי תלויים ליניארית** (linearly independent) אם השוויון

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \vec{0}, \qquad a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

מתקיים רק כאשר $a_1 = \cdots = a_n = 0$. אחרת, הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ נקראים **תלויים ליניארית** (linearly dependent).

משתי ההגדרות נובע מייד כי הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בלתי תלויים ליניארית אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$, הוקטור v_i אינו צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים בקבוצה.

הגדרה 1.3: קבוצת וקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ נקראת **בסיס** (basis) למרחב ליניארי V אם $V = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ ואם קבוצת הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בלתי תלויה ליניארית. המספר הטבעי n נקרא **המימד** (dimension) של V ורושמים $n = \dim(V)$.

הקורא יזכור בודאי מלימודי האלגברה הליניארית, כי לכל מרחב ליניארי ממשי או מרוכב קיימים אינסוף בסיסים שונים, אך לכל שני בסיסים יש אותו מספר איברים ועל כן הגדרת המימד אינה תלויה בבסיס ספציפי. כמו־כן, קיים משפט המבטיח שלכל מרחב ליניארי יש בסיס (לא בהכרח סופי!) ולכן לכל מרחב ליניארי קיים מימד. מושג נוסף בעל חשיבות הוא מושג המכפלה הפנימית. נציין שההגדרה של מרחב ליניארי אינה כוללת פעולת כפל בין שני וקטורים. לא בכל מרחב ליניארי קיימת מכפלה פנימית.

הגדרה 1.4: **(מכפלה פנימית)** יהי V מרחב ליניארי ממשי או מרוכב. **מכפלה פנימית** (inner product) היא פעולה בינארית על איברי V המסומנת על ידי $\langle u, v \rangle$ כאשר $u, v \in V$, כך שתוצאת הפעולה היא סקלר (לא וקטור!), המקיימת את התנאים:

1. לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle$ הוא מספר ממשי המקיים $\langle v, v \rangle \ge 0$.
2. לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle = 0$ אם ורק אם $v = \vec{0}$.
3. לכל $u, v, w \in V$ ולכל זוג סקלרים a, b: $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$.
4. לכל $u, v \in V$: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

מרחב ליניארי בעל מכפלה פנימית נקרא **מרחב מכפלה פנימית**.

הביטוי $\overline{\langle v, u \rangle}$ מסמן את המספר הצמוד המרוכב של $\langle v, u \rangle$. אם שדה הסקלרים שלנו הוא $\mathbb{R}$ אז נוכל כמובן לרשום את תנאי 4 בצורה $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. ישנן כמה וכמה תכונות נוספות למכפלה הפנימית הנובעות מן ההגדרה:

א. לכל $u, v, w \in V$ ולכל $a, b \in \mathbb{C}$: $\langle u, av + bw\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle + \bar{b}\langle u, w\rangle$.

ב. לכל $v \in V$ ולכל $a \in \mathbb{C}$: $\langle av, av\rangle = |a|^2\langle v, v\rangle$.

ג. לכל $v \in V$: $\left\langle \vec{0}, v\right\rangle = 0$.

ד. באופן כללי, לכל סדרה סופית של וקטורים $\{u_k\}_{k=1}^n$, לכל סדרת סקלרים $\{a_k\}_{k=1}^n$, ולכל וקטור v מתקיים

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=1}^n a_k u_k, v\right\rangle &= \sum_{k=1}^n a_k \langle u_k, v\rangle \\ \left\langle v, \sum_{k=1}^n a_k u_k\right\rangle &= \sum_{k=1}^n \overline{a_k}\langle v, u_k\rangle\end{aligned}$$

נביא כעת דוגמאות אופייניות למרחבי מכפלה פנימית.

דוגמה 1: המרחב האוקלידי $V = \mathbb{R}^n$ עם פעולת החיבור והכפל בסקלר הסטנדרטיות מהווה מרחב וקטורי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{R}$. יהי $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ וקטור של מספרים ממשיים כך שלכל $1 \le k \le n$, $r_k > 0$. נגדיר על $\mathbb{R}^n$ מכפלה פנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{r}}$ באופן הבא: לכל זוג וקטורים $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ו־ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ב־ $\mathbb{R}^n$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{r}} = \sum_{k=1}^n r_k x_k y_k .$$

הוקטור $\mathbf{r}$ נקרא **וקטור המשקל** של המכפלה הפנימית. כאשר $r_k = 1$ לכל $1 \le k \le n$, אז המכפלה הפנימית המתאימה מסומנת $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

ונקראת **המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ (dot product)**.

דוגמה 2: באופן דומה לדוגמא הקודמת, $V = \mathbb{C}^n$ עם פעולת החיבור והכפל בסקלר הסטנדרטיות מהווה מרחב וקטורי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{C}$. יהי $\mathbf{r}$ כמו בסעיף הקודם. לכל זוג וקטורים $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ נגדיר:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{r}} = \sum_{k=1}^n r_k x_k \overline{y_k} .$$

לא קשה להוכח כי זוהי מכפלה פנימית על $\mathbb{C}^n$. כמו בדוגמא הקודמת, **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** על $\mathbb{C}^n$ היא

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

דוגמה 3: יהי $V = C[a,b]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הסטנדרטיות. זהו מרחב ליניארי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{C}$. לכל זוג פונקציות $f, g \in C[a,b]$ נגדיר

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \,.$$

לא קשה לבדוק כי זוהי מכפלה פנימית על $C[a,b]$.

דוגמה 4: יהי

$$\ell_2 = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots),\;\; x_n \in \mathbb{C},\;\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

כלומר, ℓ_2 הוא מרחב כל הסדרות האינסופיות של מספרים מרוכבים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שהטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ מתכנס. פעולת החיבור על ℓ_2 היא פעולת החיבור הסטנדרטית של שתי סדרות, וכך גם פעולת הכפל בסקלר. מאוחר יותר נוכיח כי ℓ_2 הוא מרחב ליניארי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{C}$ (העובדה ש־ℓ_2 סגור תחת חיבור אינה טריביאלית). לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$ נגדיר

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \,.$$

קל להוכיח כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מקיימת את כל ארבעת התנאים של הגדרת המכפלה הפנימית. קשה יותר להוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ מתכנס לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$. עובדה זו תנבע מאי-שוויון קושי־שוורץ אשר נוכיח בסעיף הבא.

תרגילים

1. יהיו V_1, V_2, $\ldots$, V_n מרחבים ליניאריים מעל שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$. הוכח שגם $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ הוא מרחב ליניארי. מה תוכל לאמר על $W = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$?

2. הוכח שהקבוצה

$$V = \left\{ f \;\middle|\; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ אינטגרבילית בהחלט מעל } \mathbb{R} \right\}$$

מהווה מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.

3. יהי $C[-1,2]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [-1,2] \to \mathbb{C}$. אילו מן הביטויים

הבאים מגדירים מכפלה פנימית על $C[-1,2]$ ואילו לא?

א. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} |f(t)+g(t)|\,dt$

ב. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} f(t)\overline{g(t)}\,dt + f(-\frac{1}{2})\overline{g(-\frac{1}{2})}$

ג. $\langle f,g\rangle = 3\int_{-1}^{2} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

ד. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)}$

4. יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים בקטע $[-\pi,\pi]$. נגדיר:

$$\langle f,g\rangle = f(-\pi)g(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)\,dx \,.$$

האם זוהי מכפלה פנימית על V?

5. יהי $C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$. נגדיר

$$\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(0)\overline{g'(0)} + f(1)\overline{g(1)} \,.$$

א. האם זוהי מכפלה פנימית על תת־המרחב $\mathcal{P}_2 = \mathrm{Span}\{1,x,x^2\}$?

ב. האם זוהי מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$?

6. יהי $C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$. איזה מבין הביטויים הבאים מגדיר מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$?

א. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\,dt$

ב. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(1)\overline{g'(1)}$

ג. $\langle f,g\rangle = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\overline{g(t)}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

1.2 מושג הנורמה

מושג הנורמה קשור באופן טבעי למושג המכפלה הפנימית. על מנת להגדיר מהי נורמה, אין אנו זקוקים למכפלה פנימית, אך בכל מרחב מכפלה פנימית ניתן להגדיר נורמה בצורה טבעית (כפי שנראה).

הגדרה 1.5: יהי V מרחב ליניארי. **נורמה (norm)** ב־V היא פונקציה מ־V ל־$\mathbb{R}_+$ שנסמן על ידי $\|\cdot\|$, המקיימת את התנאים הבאים:

1. לכל $V \in v$, $\|v\| \geq 0$.
2. $\|v\| = 0$ אם ורק אם $v = \vec{0}$.
3. לכל $v \in V$ ולכל $a \in \mathbb{C}$, $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$.
4. לכל $u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (אי-שוויון המשולש).

מושג הנורמה הוא הכללה של מושג **הגודל** או מושג **המרחק** (מוקטור האפס). עבור כל $u, v \in V$, נוכל להתייחס אל המספר $\|u - v\|$ כאל המרחק שבין u ו־v. לכן $\|u\|$ הוא המרחק בין u ו־$\vec{0}$, או הגודל של u.

הדוגמאות הפשוטות ביותר לנורמה הן הערך המוחלט ב־$\mathbb{R}$ וב־$\mathbb{C}$. להלן דוגמאות נוספות:

דוגמה 5: אם $V = \mathbb{R}^n$ או $V = \mathbb{C}^n$ אז לכל $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ נגדיר

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

מייד נראה כי נוסחה זו מגדירה נורמה על V שנקראת **הנורמה האויקלידית**.

דוגמה 6: יהי V כמו בדוגמא 5. נגדיר עליו נורמה נוספת השונה מן הנורמה האויקלידית,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\left\{ |x_k| \,\middle|\, k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

נורמה זו נקראת **נורמת האינסוף** או **הנורמה האוניפורמית**.

דוגמה 7: עבור $V = \mathbb{R}^n$ או $V = \mathbb{C}^n$ נוכל להגדיר נורמה שלישית, השונה מן השתיים הקודמות,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

קל לבדוק שזוהי אכן נורמה.

דוגמה 8: אם $V = C[a, b]$ אז לכל $f \in V$,

$$\|f\|_\infty = \max\left\{ |f(x)| \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\}$$

היא נורמה, שגם היא נקראת **נורמת האינסוף** או **הנורמה האוניפורמית**.

כאשר V הוא מרחב מכפלה פנימית, אז ניתן להגדיר עליו נורמה בצורה טבעית על ידי

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

על מנת להוכיח כי זוהי אכן נורמה ב־V, עלינו להוכיח קודם כל את אי-השוויון החשוב

הבא.

משפט 1.6: (אי-שוויון קושי־שוורץ, Cauchy-Schwartz) יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי לכל $u, v \in V$ מתקיים אי-השוויון

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

הוכחה: אם $\langle u, v\rangle = 0$ אז אי-השוויון מתקיים באופן טריביאלי. נניח כי $\langle u, v\rangle \neq 0$ (ולכן $u, v \neq \vec{0}$). נסמן $a = \langle u, v\rangle$ (a עשוי להיות מספר מרוכב). אזי עבור כל מספר ממשי λ מתקיים

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u-\lambda a v\|^2 = \langle u-\lambda a v, u-\lambda a v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - \lambda\langle u, a v\rangle - \lambda\langle a v, u\rangle + \lambda^2\langle a v, a v\rangle \\ &= \|u\|^2 - \lambda\bar{a}\langle u, v\rangle - \lambda a\langle v, u\rangle + \lambda^2 a\bar{a}\langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 - \lambda\bar{a}a - \lambda a\bar{a} + \lambda^2 a\bar{a}\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\lambda|a|^2 + \lambda^2|a|^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

נתבונן בביטוי האחרון כפולינום במשתנה λ שמקבל ערכים אי-שליליים בלבד לכל λ ממשי. מאחר והדיסקרימיננטה במקרה זה היא אי-חיובית, או על ידי הצבת $\lambda = \frac{1}{\|v\|^2}$ (הערך המינימלי של הפולינום) נובע כי

$$0 \leq \|u\|^2\|v\|^2 - |a|^2.$$

מכאן $|a| \leq \|u\|\|v\|$. מאחר ו־ $a = \langle u, v\rangle$, קבלנו את אי-שוויון קושי־שוורץ. ∎

משפט 1.7: יהי V מרחב מכפלה פנימית. אם לכל $v \in V$ נגדיר

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

אז נקבל נורמה על V.

הוכחה: על פי הגדרת המכפלה הפנימית, המספר $\langle v, v\rangle$ הוא אי-שלילי לכל $v \in V$. לכן הביטוי $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ מוגדר היטב (וכמובן אי-שלילי). ברור כי $\|v\| = 0$ אם ורק אם $\langle v, v\rangle = 0$. על סמך הגדרת המכפלה הפנימית, שקול התנאי האחרון ל־ $v = \vec{0}$, ובכך הוכחנו את תכונות **1** ו־**2** של הנורמה. עכשיו יהי $a \in \mathbb{C}$. אזי

$$\|a v\|^2 = \langle a v, a v\rangle = |a|^2\langle v, v\rangle = |a|^2 \cdot \|v\|^2.$$

לכן $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$, ובכך הוכחנו את תכונה **3** של הנורמה. נשאר להוכיח את אי-שוויון המשולש. יהיו $u, v \in V$. אזי

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2\end{aligned}$$

ברור כי הביטוי $\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}$ מסמן מספר ממשי, ומאי-שוויון קושי־שוורץ יוצא כי

$$\left|\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}\right| \le 2|\langle u,v\rangle| \le 2\|u\| \cdot \|v\| .$$

לכן

$$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

וקבלנו את אי-שוויון המשולש. ∎

מבין כל הדוגמאות שנתנו לנורמות, רק הנורמה האויקלידית היא נורמה המבוססת על מכפלה פנימית. המכפלה הפנימית אשר עליה מבוססת נורמה זו היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית אותה הגדרנו בדוגמא 2. לכן ממשפט 1.7 נובע כי הנורמה האויקלידית היא אכן נורמה.

מאי-שוויון קושי־שוורץ ומאי-שוויון המשולש נוכל לגזור אי-שוויונים יותר ספציפיים.

דוגמה 9: אם נסתכל על $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, אז לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, הנורמה של $\mathbf{x}$ היא

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} .$$

ערך זה נקרא גם **המרחק** של $\mathbf{x}$ מראשית הצירים (זכור את משפט פיתגורס). מאי-שוויון קושי־שוורץ נקבל כי לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} .$$

לפעמים רושמים אי-שוויון זה בצורה הבאה:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) .$$

דוגמה 10: באופן דומה, אם נסתכל על $\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, אז לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, הנורמה של $\mathbf{x}$ היא

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

מאי-שוויון קושי־שוורץ נקבל כי לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}. \tag{1.1}$$

מאי-שוויון המשולש נובע כי לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}. \tag{1.2}$$

דוגמה 11: נשתמש כעת בתוצאות הקודמות בכדי להוכיח כי ℓ_2 הוא אכן מרחב ליניארי ושהמכפלה שהגדרנו עליו בדוגמא 4 היא אכן מכפלה פנימית. יהיו $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$. נוכיח ראשית כל כי המכפלה הפנימית $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ אכן מוגדרת. נזכור כי

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n \overline{y_n}.$$

נוכיח כי הטור מתכנס בהחלט (כלומר, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \overline{y_n}|$ מתכנס). לכל m טבעי, מאי-השוויון (1.1) נובע כי

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n \overline{y_n}| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{m} |y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

לכן סדרת הסכומים החלקיים $S_m = \sum_{n=1}^{m} |x_n \overline{y_n}|$ חסומה מלמעלה על ידי $\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. מאחר וסדרת הסכומים החלקיים $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה, הרי שהיא מתכנסת. מכאן שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ מתכנס, ולכן המכפלה הפנימית על ℓ_2 מוגדרת היטב. נשאר להוכיח כי המרחב ℓ_2 סגור תחת חיבור. יהיו $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$. עלינו להראות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2$ מתכנס. מאי-שוויון (1.2) נובע כי לכל n טבעי,

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n + y_n|^2 \le \left[\left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

לכן סדרת הסכומים החלקיים $\sum_{n=1}^{m}|x_n+y_n|^2$ היא מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה על ידי $(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2$. הוכחנו כי $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\ell_2$.

דוגמה 12: אי-השוויון של קושי־שוורץ במרחב הפונקציות הרציפות $C[a,b]$ נותן

$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\right|^2 \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right).$$

תרגילים

1. הוכח כי "הנורמות" שהוגדרו בדוגמאות 6-8 הן אכן נורמות.

2. **א.** הוכח כי לכל $f,g\in C[a,b]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

מתקיים השוויון

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b |f(x)g(y)-g(x)f(y)|^2\,dx\,dy=\|f\|^2\cdot\|g\|^2-|\langle f,g\rangle|^2.$$

ב. על ידי אי-השוויון הקודם הוכח את אי-שוויון קושי־שוורץ עבור המרחב $C[a,b]$.

3. יהי V מרחב בעל מכפלה פנימית, $u,v\in V$, ו־$u,v\neq\vec{0}$.
א. הראה כי $\langle u,v\rangle=\|u\|\cdot\|v\|$ אם ורק אם $u=av$, כאשר $a\in\mathbb{C}$.
ב. הראה כי $\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$ אם ורק אם $u=av$, כאשר $a\geq 0$.

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים "חוק המקבילית"

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2.$$

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב. הוכח שלכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \frac{i}{4}\|u-iv\|^2 .$$

7. על סמך שני התרגילים הקודמים, הוכח שבכל מרחב נורמה המקיים את חוק המקבילית ניתן להגדיר מכפלה פנימית אשר עליה הנורמה מבוססת.

8. **אי-שוויון הממוצעים:** הוכח שלכל n מספרים ממשיים x_1, x_2, ... , x_n מתקיים אי-השוויון

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

1.3 מערכות אורתוגונליות ומערכות אורתונורמליות

הגדרה 1.8: יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. נאמר כי u ו־v **ניצבים** אחד לשני או **אורתוגונליים (orthogonal)** אם $\langle u, v\rangle = 0$. ניתן לסמן עובדה זו על ידי $u \perp v$.

הגדרה 1.9: יהי V מרחב מכפלה פנימית. סדרה סופית $\{u_k\}_{k=1}^n$ או סדרה אינסופית $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ של וקטורים ב־V נקראת **מערכת אורתוגונלית** אם לכל k, $u_k \neq \vec{0}$, ולכל $j \neq k$ מתקיים $u_k \perp u_j$. אם, בנוסף לכך, מתקיים גם התנאי $\|u_k\| = 1$ לכל k אז הסדרה נקראת **מערכת אורתונורמלית**.

כל וקטור $u \in V$ אשר אורכו 1 ($\|u\| = 1$) נקרא **וקטור יחידה (unit vector)**. לכן, נוכל לומר כי מערכת אורתונורמלית היא מערכת אורתוגונלית אשר כל איבריה הם וקטורי יחידה. אם נתונה לנו מערכת אורתוגונלית $\{u_k\}_{k=1}^n$ (כאשר n מספר טבעי או אינסוף) נוכל לקבל ממנה בקלות מערכת אורתונורמלית על ידי "נירמול" כל אחד מן הוקטורים שבמערכת: לכל k, יהי $e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$. ברור כי לכל k, $\|e_k\| = 1$, ולכל $j \neq k$, $e_k \perp e_j$. לכן $\{e_k\}_{k=1}^n$ היא מערכת אורתונורמלית מאותו סדר גודל של המערכת האורתוגונלית המקורית. עובדה יותר חשובה היא ש־$\mathrm{Span}\{u_k\}_{k=1}^n = \mathrm{Span}\{e_k\}_{k=1}^n$.

טענה 1.10: תהי $\{u_k\}_{k=1}^n$ מערכת אורתוגונלית סופית במרחב מכפלה פנימית V. אזי סדרת הוקטורים $\{u_k\}_{k=1}^n$ בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה: נניח כי

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C} \qquad a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = \vec{0}.$$

אזי, לכל $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \vec{0}, u_k \right\rangle = \langle a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n, u_k \rangle \\ &= a_1 \langle u_1, u_k \rangle + a_2 \langle u_2, u_k \rangle + \cdots + a_k \langle u_k, u_k \rangle + \cdots + a_n \langle u_n, u_k \rangle \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot \langle u_k, u_k \rangle + \cdots + a_n \cdot 0 \\ &= a_k \langle u_k, u_k \rangle \end{aligned}$$

מאחר ו־$0 \neq \langle u_k, u_k \rangle = \|u_k\|^2$, הרי ש־$a_k = 0$. יוצא שלכל $1 \le k \le n$, בהכרח $a_k = 0$, ולכן סדרת הוקטורים $\{u_k\}_{k=1}^n$ היא בלתי־תלויה ליניארית. ∎

נשאלת השאלה: תהי $\{v_k\}_{k=1}^n$ סדרת וקטורים סופית ובלתי תלויה ליניארית במרחב מכפלה פנימית V. האם קיימת מערכת אורתונורמלית $\{e_k\}_{k=1}^n$ כך ש־

$$\operatorname{Span}\{e_k\}_{k=1}^n = \operatorname{Span}\{v_k\}_{k=1}^n \ ?$$

ואם כן, האם קיימת דרך להגיע למערכת $\{e_k\}_{k=1}^n$ מן הסדרה המקורית $\{v_k\}_{k=1}^n$? התשובה לשתי השאלות היא חיובית, ותהליך ידוע שבאמצעותו בונים את מערכת אורתונורמלית מן הסדרה המקורית נקרא **תהליך גרם-שמידט**, אותו נתאר בקצרה בסעיף הבא.

אחד היתרונות שיש למערכת אורתונורמלית הוא הקלות היחסית של מציאת המקדמים בפיתוח של כל וקטור הנפרש על ידה כצירוף ליניארי.

טענה 1.11: יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_1, \dots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־V. אם $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ אזי לכל $1 \le k \le n$, $a_k = \langle u, e_k \rangle$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \langle u, e_k \rangle &= \langle a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n, e_k \rangle \\ &= a_1 \langle e_1, e_k \rangle + a_2 \langle e_2, e_k \rangle + \cdots + a_k \langle e_k, e_k \rangle + \cdots + a_n \langle e_n, e_k \rangle \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 0 \\ &= a_k \end{aligned}$$

■

יוצא ממשפט זה שאם $\{e_1,\dots,e_n\}$ מערכת אורתונורמלית, אזי לכל וקטור u הנפרש על ידה מתקיים השוויון

$$u=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k=\sum_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle\, e_k .$$

המקדם a_k נקבע באופן יחיד על ידי הנוסחה $a_k=\langle u,e_k\rangle$. לכן הוא תלוי רק בוקטור e_k ולא באף אחד מן הוקטורים האחרים! באופן כללי, אם $u\in\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_n\}$, כאשר $\{v_1,\dots,v_n\}$ אינה מערכת אורתונורמלית, אז כל אחד מן המקדמים a_k בפיתוח של u כצירוף ליניארי יהיה תלוי בכל הוקטורים $\{v_1,\dots,v_n\}$. הטענה האחרונה משמשת בסיס להגדרה יותר רחבה.

הגדרה 1.12: יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ מערכת אורתונורמלית בתוכו (כאשר n סופי או אינסופי). יהי $u\in V$. המספרים $\langle u,e_k\rangle$ נקראים **מקדמי פורייה מוכללים (generalized Fourier coefficients)** של הוקטור u ביחס למערכת האורתונורמלית הנתונה.

תכונה נוספת שיש למערכות אורתונורמליות, שמסייעת לחישובי מכפלות פנימיות, מובאת בטענה הבאה.

טענה 1.13: יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_1,\dots,e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־V. אם $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ ו־ $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ סדרות כלשהן של סקלרים, אזי

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n}a_ke_k,\sum_{k=1}^{n}b_ke_k\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{b_k} .$$

ההוכחה דומה להוכחת טענה 1.10 או טענה 1.11. נציין שבמקרה הכללי (כאשר המערכת אינה אורתוגונלית) בדרך כלל עשויים להדרש n^2 מכפלות שונות בכדי לקבל את התוצאה.

את המשפט הבא ניתן לראות כהכללה מיידית של משפט פיתגורס למרחבי מכפלה פנימית.

משפט 1.14: **(משפט פיתגורס המוכלל)** יהי V מרחב מכפלה פנימית

א. תהי $\{u_1,\dots,u_n\}$ מערכת אורתוגונלית ב־V, ויהיו $\{a_1,\dots,a_n\}$ סקלרים. אזי

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}a_ku_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\|u_k\|^2 .$$

ב. תהי $\{e_1,\ldots,e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־V. אזי לכל $u \in \mathrm{Span}\{e_1,\ldots,e_n\}$

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle|^2 .$$

הוכחה:

א. נסתמך על טענה 1.13.

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n a_k u_k\right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_k u_k, \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \langle u_k, u_j\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|u_k\|^2\end{aligned}$$

ב. תוצאה מידית מסעיף א' ומטענה 1.11. ∎

ניתן לראות בחלק ב' של משפט זה הכללה טבעית של מושג הנורמה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$. שכן, מן האיזומורפיזם הקיים בין $W = \mathrm{Span}\{e_1,\ldots,e_n\}$ ו־$\mathbb{C}^n$ (בהנחה ש־V הוא מרחב ליניארי מרוכב), נוכל לזהות כל וקטור $u \in W$ עם סדרת מקדמי פורייה המוכללים שלו $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$. המשפט האחרון למעשה טוען כי $\|u\| = \|(a_1,\ldots,a_n)\|$, כאשר הנורמה שבצד ימין היא הנורמה הסטנדרטית על $\mathbb{C}^n$. לכן, כמרחבי מכפלה פנימית, לא קיים הבדל מהותי בין W ובין $\mathbb{C}^n$!

תרגילים

1. יהי $C[-1,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

א. יהיו $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, ו־$P_2(x) = 1 - 3x^2$. הוכח כי קבוצה זו של פולינומים היא אורתוגונלית ב־$C[-1,1]$.

ב. מצא קבועים מתאימים a, b, ו־c כך שהפונקציה

$$P_3(x) = a + bx + cx^2 + x^3$$

תהיה ניצבת לכל אחת מן הפונקציות הקודמות.

2. יהי $\mathcal{P}_2$ מרחב כל הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל־2. לכל $f, g \in \mathcal{P}_2$

נגדיר

$$\langle f,g\rangle=\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx\ .$$

א. הוכח כי זוהי מכפלה פנימית על $\mathcal{P}_2$.

ב. הראה שהקבוצה $\{1,\ \ 1-x,\ \ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו.

3. יהי $C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$.

א. הוכח כי

$$\langle f,g\rangle=f(0)\cdot\overline{g(0)}+\int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx$$

היא מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$.

ב. מצא מערכת אורתונורמלית $\{h_1,h_2,h_3\}$ ב־$C^1[0,1]$ ביחס למכפלה פנימית זו כך ש־

$$\mathrm{Span}\{h_1,h_2,h_3\}=\mathrm{Span}\{1,x,x^2\}\ .$$

1.4 היטלים אורתוגונליים או קירוב בממוצע

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_1,\dots,e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־V. נגדיר $W=\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_n\}$. יהי $u\in V$ וקטור כלשהו. בסעיף הקודם הגדרנו את המקדמי פוריה המוכללים של u להיות $\langle u,e_k\rangle$. אם $u\notin W$ אז ברור כי $u\neq\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle\,e_k$. נשאלת השאלה האם, למרות זאת, קיים יחס משמעותי בין u לבין $\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle\,e_k$? בסעיף זה ננסה לתת תשובה מפורטת לשאלה זו.

עבור כל $u\in V$, נסמן $\tilde u=\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle\,e_k$. הוקטור $\tilde u$ יקרא **ההיטל האורתוגונלי** של u **על** W.

טענה 1.15: עבור כל $u\in V$,

א. $\langle u-\tilde u,w\rangle=0$, לכל $w\in W$.

ב. $\|u-w\|^2=\|u-\tilde u\|^2+\|\tilde u-w\|^2$, לכל $w\in W$.

הערה: החלק הראשון של הטענה אומר כי הוקטור $u-\tilde u$ ניצב לכל וקטור $w\in W$. במקרה כזה אומרים כי $u-\tilde u$ ניצב לתת־המרחב W, ורושמים $u-\tilde u\perp W$.

הוכחה:

א. נוכיח תחילה כי $\langle u-\tilde{u}, e_j\rangle = 0$, לכל $1 \le j \le n$.

$$\begin{aligned}\langle u-\tilde{u}, e_j\rangle &= \langle u, e_j\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle u, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle \langle e_k, e_j\rangle \\ &= \langle u, e_j\rangle - \langle u, e_j\rangle \langle e_j, e_j\rangle = \langle u, e_j\rangle - \langle u, e_j\rangle = 0\end{aligned}$$

אם עכשיו נקח $w \in W$ כלשהו, אזי $w = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$, ו־

$$\langle u-\tilde{u}, w\rangle = \left\langle u-\tilde{u}, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j} \langle u-\tilde{u}, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j} \cdot 0 = 0 \; .$$

ב. על פי חלק א', $(u-\tilde{u}) \perp w$, לכל $w \in W$. מכך יוצא מייד כי $(u-\tilde{u}) \perp (\tilde{u}-w)$, כי $\tilde{u}-w \in W$. לכן ממשפט 1.14.א' נקבל

$$\|u-w\|^2 = \|u-\tilde{u}+\tilde{u}-w\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u}-w\|^2$$

והוכחת המשפט הסתיימה. ∎

שימושים של התוצאה האחרונה יבואו לאחר ההגדרה הבאה של מושג המרחק (אותו כבר פגשנו בסעיף 1.2).

הגדרה 1.16: יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל $u, v \in V$, **המרחק (distance)** בין u ו־v הוא המספר הממשי האי-שלילי $\|u-v\|$.

בכדי שהשימוש בשם "מרחק" יהיה מוצדק ביחס למושג המרחק המוכר לנו מגאומטריה אויקלידית, עליו להיות בעל מספר תכונות יסודיות שנפרט להלן:

א. לכל $u, v \in V$, $\|u-v\| = \|v-u\|$. באופן מילולי: המרחק בין u ו־v שווה למרחק בין v ו־u.

ב. לכל $u \in V$, $\|u-u\| = 0$. כלומר: המרחק בין u לעצמו הוא אפס.

ג. לכל $u, v \in V$, אם $\|u-v\| = 0$ אז $v = u$. כלומר: אם המרחק בין u ו־v הוא אפס, אזי $v = u$.

ד. לכל $u, v, w \in V$, $\|u-w\| \le \|u-v\| + \|v-w\|$. כלומר: המרחק בין u ו־w תמיד קטן או שווה לסכום המרחקים של u ו־w מנקודה שלישית v.

התכונות א-ג נובעות מייד מהגדרת הנורמה. תכונה ד' נובעת בקלות מאי-שוויון המשולש

$$\|u-w\| = \|u-v+v-w\| \le \|u-v\| + \|v-w\| .$$

משפט 1.17: יהי V מרחב מכפלה פנימית, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־V. ו־$W = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. יהי $u \in V$. אזי הוקטור $\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$ הינו הוקטור הקרוב ביותר ל־u השייך ל־W. יתרה מזאת, $\tilde{u}$ הוא הוקטור היחיד ב־W אשר מרחקו מ־u מינימלי.

הוכחה: עלינו להראות כי $\|u - w\| \le \|u - \tilde{u}\|$, לכל $w \in W$. זה נובע מייד מן החלק השני של טענה 1.15. לכל $w \in W$,

$$\|u - w\|^2 = \|u - \tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u} - w\|^2$$

ולכן $\|u - w\| \le \|u - \tilde{u}\|$, לכל $w \in W$. לגבי היחידות של $\tilde{u}$, ברור מאותו שוויון שאם $\|u - w\| = \|u - \tilde{u}\|$, עבור $w \in W$, אזי $\|\tilde{u} - w\| = 0$, ולכן $w = \tilde{u}$. ∎

תשובה אחת לשאלה ששאלנו בתחילת הסעיף היא: הוקטור $\tilde{u}$ הוא הנציג "הקרוב ביותר" ל־u השייך ל־W. תשובה מלאה יותר לשאלה תתקבל לאחר שנבין כיצד $\tilde{u}$ עשוי לייצג את u, ולאיזו מטרה.

דוגמה 13: עבור המרחב הליניארי $C[-1,1]$, הנורמה

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

נובעת מהמכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} \, dx \, .$$

בכדי למצוא את הקירוב הטוב ביותר עבור $f \in C[-1,1]$ בתת־המרחב $W = \mathrm{Span}\{1, x\}$ עלינו למצוא סקלרים a^* ו־b^* המקיימים

$$\|f - (a^* + b^* x)\| \le \|f - (a + bx)\|$$

לכל $a, b \in \mathbb{C}$. הפונקציות $e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ו־ $e_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ מהוות בסיס אורתונורמלי למרחב W. לכן בעייה זו שקולה למציאת סקלרים c^* ו־d^* המקיימים

$$\|f - (c^* e_1 + d^* e_2)\| \le \|f - (c e_1 + d e_2)\|$$

לכל $c, d \in \mathbb{C}$. ממשפט 1.17 נובע שקיים פתרון יחיד לבעייה זו והוא

$$.c^* = \langle f, e_1 \rangle\,, \qquad d^* = \langle f, e_2 \rangle$$

אם, למשל, $f(x) = x^3$ אזי

$$c^* = \langle f, e_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = 0$$

$$.d^* = \langle f, e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\frac{3}{2}}\, x\, dx = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

לכן

$$c^* e_1(x) + d^* e_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\, x = \frac{3}{5} x$$

הוא הקירוב הטוב ביותר ל־ x^3 בתוך W ביחס לנורמה הנ"ל.

תוצאה נוספת שנובעת מייד מטענה 1.15 היא

טענה 1.18: תהי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V. אזי לכל $u \in V$ מתקיים אי-השוויון

$$. \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k \rangle|^2 \le \|u\|^2$$

הוכחה: נציב $w = \vec{0}$ בחלק ב' של טענה 1.15 ונקבל

$$.\|u\|^2 = \|u - \tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u}\|^2$$

לכן $\|\tilde{u}\|^2 \le \|u\|^2$. ממשפט 1.14.ב'

$$\|\tilde{u}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k \rangle|^2$$

ומכאן נובעת הטענה. ∎

לא קשה לראות כי השוויון $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k \rangle|^2$ מתקיים אם ורק אם $u \in \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

1.4.1 תהליך גרם-שמידט (Gram–Schmidt process)

יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_1,\ldots,v_n\}$ סדרה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב־V. נתאר תהליך אשר באמצעותו נקבל סדרה אורתונורמלית $\{e_1,\ldots,e_n\}$ של וקטורים ב־V כך ש־

$$\operatorname{Span}\{v_1,\ldots,v_n\}=\operatorname{Span}\{e_1,\ldots,e_n\}\,.$$

התהליך מורכב מ־n שלבים כאשר בשלב k, $1\le k\le n$, נבנה את הוקטור e_k באופן כזה שיתקיים

$$\operatorname{Span}\{v_1,\ldots,v_k\}=\operatorname{Span}\{e_1,\ldots,e_k\}\,.$$

שלב 1: מן העובדה שהסדרה $\{v_1,\ldots,v_n\}$ היא בלתי תלויה ליניארית נובע כי $v_1\neq\vec{0}$, ולכן נוכל להגדיר את e_1 על ידי

$$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

ברור כי $\|e_1\|=1$ וכי $\operatorname{Span}\{v_1\}=\operatorname{Span}\{e_1\}$.

שלב 2: יהי $W_1=\operatorname{Span}\{e_1\}$ ויהי $\tilde{v}_2=\langle v_2,e_1\rangle\,e_1$ ההיטל האורתוגונלי של v_2 על W_1. על פי טענה 1.15.א, $v_2-\tilde{v}_2\perp e_1$, ובנוסף לכך $v_2-\tilde{v}_2\neq\vec{0}$ משום שאחרת נקבל כי $v_2\in W_1$ בסתירה לעובדה שהקבוצה $\{v_1,v_2\}$ בלתי תלויה ליניארית. לכן אם נגדיר

$$e_2=\frac{v_2-\tilde{v}_2}{\|v_2-\tilde{v}_2\|}$$

אז נקבל ש־$e_1\perp e_2$, $\|e_2\|=1$, ו־$\operatorname{Span}\{v_1,v_2\}=\operatorname{Span}\{e_1,e_2\}$. במילים אחרות, הסדרה $\{e_1,e_2\}$ היא סדרה אורתונורמלית הפורשת את אותו התת־מרחב שנפרש על ידי $\{v_1,v_2\}$.

שלב k: יהי $W_{k-1}=\operatorname{Span}\{e_1,\ldots,e_{k-1}\}$ ויהי $\tilde{v}_k=\sum_{j=1}^{k-1}\langle v_k,e_j\rangle\,e_j$ ההיטל האורתוגונלי של v_k על W_{k-1}. על פי טענה 1.15.א, $v_k-\tilde{v}_k\perp W_{k-1}$, ובנוסף לכך $v_k-\tilde{v}_k\neq\vec{0}$. לכן, אם נגדיר

$$e_k=\frac{v_k-\tilde{v}_k}{\|v_k-\tilde{v}_k\|}$$

אז נקבל שוב כי $\operatorname{Span}\{v_1,\ldots,v_k\}=\operatorname{Span}\{e_1,\ldots,e_k\}$ וש־$\{e_1,\ldots,e_k\}$ היא סדרה אורתונורמלית.

נוכל להמשיך באותו אופן עד לשלב n בו נקבל את המערכת האורתונורמלית $\{e_1,\ldots,e_n\}$ הרצויה.

תרגילים

1. תהי $f \in C[-\pi,\pi]$. לכל $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$.F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta\cos x - \gamma\cos 10x|^2 dx$$

הוכח כי F מקבלת ערך קטן ביותר בדיוק בנקודה אחת $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ ומצא נקודה זו כאשר

א. $f(x) = \cos^2 x$ **ב.** $f(x) = x^3$ **ג.** $f(x) = \sin x$

ד. $f(x) = 1 - 2\cos x$ **ה.** $f(x) = |x|$ **ו.** $f(x) = |\sin x|$

2. במרחב $C[0,2\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית

$$.\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

א. הוכח כי הקבוצה $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית.

ב. יהי W תת־המרחב הנפרש על ידי S, ותהי $f(x) = x$ בקטע $[0,2\pi]$. מצא את הפונקציה g שנפרשת על ידי S שהיא הכי קרובה ל־f (כלומר $\|f-g\|$ מינימלי).

3. יהי $C[-\pi,\pi]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

ויהי $W = \operatorname{Span}\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ x\}$, ותהי $f(x) = |x|$. מצא פונקציה $g \in W$ כך שהערך של $\|f-g\|$ יהיה הקטן ביותר.

4. לכל $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$.F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x - \alpha - \beta\cos x - \gamma\sin 2x|^2 dx$$

הראה כי F מקבלת ערך מינימלי בנקודה אחת בלבד ומצא נקודה זו.

5. במרחב $C[-1,1]$ נתונות הפונקציות

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x+a \\ f_2(x) &= x^2+bx+c \\ f_3(x) &= x^3+Ax^2+Bx+C \end{aligned}$$

וידוע כי הקבוצה $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ היא מערכת אורתוגונלית ב־ $C[-1,1]$ ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx\ .$$

א. חשב את a, b, c.

ב. לכל $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \int_{-1}^{1} |x^4-\alpha f_0(x)-\beta f_1(x)-\gamma f_2(x)-\delta f_3(x)|^2 dx\ .$$

הוכח ש־ F מקבלת ערך קטן ביותר בנקודה אחת בדיוק, ומצא נקודה זו.

1.5 מערכות אורתונורמליות אינסופיות

יהי V מרחב מכפלה פנימית. בסעיף זה נניח כי $\dim(V)=\infty$. תהי $\{e_1,e_2,\ldots\}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית בתוכו. נציין כי מושג הבסיס למרחב וקטורי מימד אינסופי הוא בעייתי, ולכן אין להתייחס למערכת האורתונורמלית כאל בסיס או אפילו כקבוצה פורשת עבור V או עבור תת־מרחב של V. מאוחר יותר נחזור לנקודה בעייתית זו.

משפט 1.19: (אי-שוויון בסל, Bessel) לכל $u\in V$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2$ מתכנס, ובנוסף לכך מתקיים אי-השוויון

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2 \le \|u\|^2\ .$$

הוכחה: זוהי תוצאה מיידית של טענה 1.18. לכל m,

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}|\langle u,e_n\rangle|^2 \le \|u\|^2\ .$$

כלומר, הסדרה $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה על ידי המספר $\|u\|^2$. מאחר וזוהי סדרה

מונוטונית עולה, הרי שהיא מתכנסת לגבול סופי, ובנוסף לכך

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}|\langle u,e_n\rangle|^2\le\|u\|^2 .$$

מכך נקבל את אי-השוויון של בסל. ∎

במידה ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2=\|u\|^2$ אז אומרים כי מתקיים שוויון פרסבל (Parseval) עבור u. תוצאה מיידית מאי-שוויון בסל היא:

משפט 1.20: (הלמה של רימן־לבג, Riemann-Lebesgue) תהי $\{e_1,e_2,\ldots\}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית V, ויהי $u\in V$. אזי

$$\lim_{n\to\infty}\langle u,e_n\rangle=0 .$$

הוכחה: על פי אי-שוויון בסל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2$ מתכנס. ידוע כי אם טור מתכנס אז האיבר ה־n־י שלו שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף. ∎

כפי שאמרנו בתחילת הסעיף, מושג הבסיס במרחב ליניארי ממימד אינסופי הוא בעייתי ויש לטפל בו בזהירות רבה. אחת הבעיות הראשונות שעולות בהקשר זה היא כיצד נגדיר מהו "צירוף ליניארי אינסופי"? נחדד את השאלה: יהי V מרחב מכפלה פנימית, תהי $\{u_1,u_2,\ldots\}$ קבוצה אינסופית של וקטורים בתוכו, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת סקלרים. האם נוכל להעניק מובן כלשהו לביטוי "$\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n$"? מדובר בסכום אינסופי של וקטורים

$$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n+\cdots$$

ולאו דוקא בסכום אינסופי של מספרים! גם אם נצליח להעניק מובן למהו סכום אינסופי של וקטורים, יהיה עלינו בנוסף לכך לודא שתחת מובן זה יישמרו מספר תכונות רצויות שיש לבסיסים סופיים. בכדי להשיג את מטרה זו נגייס לעזרתנו את מושג ההתכנסות בנורמה (שכמובן תלוי רק במושג הנורמה).

הגדרה 1.21: תהי $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרה אינסופית של וקטורים במרחב עם נורמה V. נאמר כי הסדרה **מתכנסת בנורמה** לוקטור $w\in V$ אם

$$\lim_{m\to\infty}\|w-w_m\|=0 .$$

כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי $m(\varepsilon)$ כך שלכל $m\ge m(\varepsilon)$, $\|w-w_m\|<\varepsilon$.

כעת נוכל לתת משמעות למהו "צירוף ליניארי אינסופי".

הגדרה 1.22: תהי $\{u_1, u_2, \ldots\}$ סדרה אינסופית של וקטורים במרחב עם נורמה V, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת סקלרים. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ **מתכנס בנורמה** לוקטור $w \in V$, ונרשום $w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, אם סדרת **הסכומים החלקיים** $w_m = \sum_{n=1}^{m} a_n u_n$ מתכנסת בנורמה ל־w. במילים אחרות, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ מתכנס בנורמה לוקטור w אם

$$\lim_{m\to\infty} \left\| w - \sum_{n=1}^{m} a_n u_n \right\| = 0 .$$

משמעות הביטוי "הוקטור w נפרש על ידי הסדרה האינסופית $\{u_1, u_2, \ldots\}$" הוא שקיימת סדרה מתאימה של סקלרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שעבור כל m, הצירוף $a_1u_1 + \cdots + a_m u_m$ הוא קירוב יותר ויותר טוב לוקטור w, ככל ש־m הולך וגדל. הקירבה בין וקטורים במרחב בעל נורמה נמדדת על פי המרחק שביניהן, ולכן המשמעות המדויקת של הטענה הקודמת היא שעבור כל $\varepsilon > 0$, קטן כרצוננו, קיים $m(\varepsilon)$ כך שלכל $m \geq m(\varepsilon)$,

$$\|w - (a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_m u_m)\| < \varepsilon .$$

כעת באפשרותנו לנסח תכונה הרצויה לנו לגבי מערכת אורתונורמלית.

הגדרה 1.23: תהי $\{e_1, e_2, \ldots\}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית V. נאמר שהמערכת היא **סגורה** ב־V אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n \right\| = 0 .$$

נזכור כי $\sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n$ הוא הוקטור הקרוב ביותר ל־u במרחב $\mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_m\}$. עצם הגדרת התכונה אינה מבטיחה לנו את קיומה בפועל. נצטרך לטרוח לא מעט בפרק הבא על מנת להוכיח שהיא אכן מתקיימת בדוגמא החשובה לנו. בינתיים ננסח תכונה נוספת, השקולה לתכונת הסגירות.

טענה 1.24: המערכת האורתונורמלית $\{e_1, e_2, \ldots\}$ סגורה במרחב מכפלה פנימית V אם ורק אם לכל $u \in V$ מתקיים השוויון

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 = \|u\|^2 .$$

כלומר, תכונת הסגירות שקולה לקיום שוויון פרסבל לכל $u \in V$.

הוכחה: לכל m טבעי, יהי $V_m = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_m\}$, ויהי $u_m = \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n$ ההיטל

האורתוגונלי של u על V_m. על פי טענה 1.15.ב, אם נציב שם $w=\vec{0}$, נקבל

$$\|u\|^2 = \|u-u_m\|^2 + \|u_m\|^2$$

ולכן

$$\left\|u - \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n\rangle e_n\right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u, e_n\rangle|^2 .$$

אזי הטענה

$$\lim_{m\to\infty} \left\|u - \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n\rangle e_n\right\|^2 = 0$$

שקולה לטענה

$$\lim_{m\to\infty} \left(\|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u, e_n\rangle|^2\right) = 0 .$$

ברור לנו כי הטענה $0 = \lim_{m\to\infty}\left(\|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u, e_n\rangle|^2\right)$ שקולה לשוויון פרסבל $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2$. ∎

מושג חשוב נוסף הקשור למערכת אורתונורמלית אינסופית הוא מושג **השלמות**.

הגדרה 1.25: תהי $\{e_1, e_2, \ldots\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V. נאמר כי המערכת היא **שלמה** ב־V אם הוקטור היחיד המקיים את התנאי

$$\langle u, e_n\rangle = 0, \quad n\in\mathbb{N} \tag{1.3}$$

הוא וקטור האפס $u=\vec{0}$.

ברור שתכונת השלמות רצויה לנו עבור "בסיס" כלשהו. שים לב שקל מאוד לבנות מערכת אורתונורמלית לא שלמה וגם לא סגורה (פשוט נקח מערכת אורתונורמלית כלשהיא ונזרוק החוצה את אחד מאיבריה). מתברר שמושג השלמות הוא חלש יותר ממושג הסגירות (ואינו שקול לו).

טענה 1.26: אם $\{e_1, e_2, \ldots\}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב־V אזי היא שלמה ב־V.

הוכחה: נניח שהמערכת סגורה. יהי $u\in V$ וקטור שמקיים את תנאי (1.3). על פי טענה 1.24

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |0|^2 = 0$$

ולכן בהכרח $u=\vec{0}$. ∎

אם המערכת $\{e_1, e_2, \ldots\}$ אינה סגורה אזי הסכום $\sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n\rangle e_n$ אינו בהכרח קרוב

ל־u, בלא קשר לכמה m גדול. לפעמים גם אם המערכת סגורה, האופן בו הסכום הנ"ל מתקרב ל־u אינו מספיק טוב למטרות מסוימות, ואז יש לנסות ולמצוא מערכת אורתונורמלית טובה יותר.

נסיים את הפרק בהכללה של שוויון פרסבל.

טענה 1.27: (שוויון פרסבל מוכלל) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_1, e_2, \ldots\}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב־V. יהיו $u, v \in V$, $a_n = \langle u, e_n \rangle$ ו־$b_n = \langle v, e_n \rangle$. אזי

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}\,.$$

הוכחה: נשתמש בזהות

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \frac{i}{4}\|u-iv\|^2 \tag{1.4}$$

(ראה תרגיל 6 בסעיף 1.2). מאחר והמערכת האורתונורמלית $\{e_1, e_2, \ldots\}$ סגורה ב־V הרי שמטענה 1.24 נובעים כל ארבעת השוויונים הבאים

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2 \\
\|u-v\|^2 &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \\
\|u+iv\|^2 &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + ib_n|^2 \\
\|u-iv\|^2 &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - ib_n|^2 .
\end{aligned}$$

על ידי שימוש בזהויות אלה בנוסחה (1.4), ועל ידי שימוש בזהות

$$a_n \overline{b_n} = \frac{1}{4}|a_n + b_n|^2 - \frac{1}{4}|a_n - b_n|^2 + \frac{i}{4}|a_n + ib_n|^2 - \frac{i}{4}|a_n - ib_n|^2$$

נקבל את התוצאה. ∎

תרגילים

1. תהי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית V, ויהי $v \in V$ כך ש־

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$$

הוכח כי לכל n,

$$a_n = \frac{1}{\|u_n\|^2}\langle v, u_n\rangle.$$

.2 לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר פונקציה $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \sqrt{n}, & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

הוכח כי סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לאפס על כל הקטע $[0,1]$ אך אינה מתכנסת לפונקצית האפס בנורמה

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

.3 מצא סדרת פונקציות במרחב $C[0,\infty)$ שמתכנסת במידה שווה לאפס על כל הקטע $[0,\infty)$, אך אינה מתכנסת לפונקצית האפס בנורמה

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

.4 יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב־V. נגדיר

$$f_{2n-1} = \frac{e_{2n} - e_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \quad f_{2n} = \frac{e_{2n} + e_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב־V.

.5 יהי V מרחב מכפלה פנימית.

א. הוכח כי לכל $u, v \in V$, $\big|\|u\| - \|v\|\big| \le \|u - v\|$.

ב. תהי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת וקטורים ב־V, המתכנסת בנורמה לוקטור $u \in V$ (כלומר $\lim_{n\to\infty}\|u - u_n\| = 0$). הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\|u_n\| = \|u\|$.

1.6 תרגילים לחזרה כללית

.1 יהי $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$ עגול היחידה הפתוח ב־$\mathbb{R}^2$, ויהי $C(\mathcal{D})$ אוסף כל הפונקציות הרציפות $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. לכל $f, g \in C(\mathcal{D})$ נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\overline{g(x,y)}\, dx\, dy$$

ולכל n טבעי תהי

$$f_n(x,y) = (x+iy)^n$$

א. הוכח כי $\langle f, g \rangle$ היא מכפלה פנימית על $C(\mathcal{D})$.

ב. הוכח כי סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית ב־$C(\mathcal{D})$.

.2 לכל $f, g \in C[-1,1]$ נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

א. הוכח כי זוהי מכפלה פנימית על $C[-1,1]$.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר פונקציה T_n ב־$C[-1,1]$ על ידי

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

הפונקציה T_n נקראת פולינום צ'בישב (Chebyshev). הוכח כי סדרת הפונקציות $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית במרחב $C[-1,1]$.

ג. על ידי ההצבה $\theta = \arccos x$, הוכח כי לכל n, $T_n(x)$ היא למעשה פולינום ממעלה n במשתנה x.

.3 הפולינומים של לג'נדר (Legendre) הם:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

א. הוכח כי

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

ולכן $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית במרחב $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית

$$.\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

ב. תהי

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

בטא את f כצרוף ליניארי של הפולינומים של לג'נדר.

4. יהי N מספר טבעי נתון. לכל $m = 0,1,\ldots,N-1$ נגדיר וקטור ב־ $\mathbb{C}^N$:

$$.u_m = \left(1,\ e^{\frac{-2\pi i m}{N}},\ e^{\frac{-4\pi i m}{N}},\ \ldots,\ e^{\frac{-2(N-1)\pi i m}{N}}\right)$$

הוכח כי:

א. סדרת הוקטורים $\{u_m\}_{m=0}^{N-1}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב $\mathbb{C}^N$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ב. לכל $m = 0,1,\ldots,N-1$, $\|u_m\|^2 = N$.

ג. לכל $u \in \mathbb{C}^N$, $u = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \langle u, u_m\rangle\, u_m$.

הערה: וקטור המקדמים $\{\langle u, u_m\rangle\}_{m=0}^{N-1}$ נקרא **ההתמרת פוריה הדיסקרטית** של u (Discrete Fourier Transform), ויש לה שימושים חשובים בתחום עיבוד אותות ותמונות.

פרק 2
טורי פוריה

בפרק זה נלמד על טורי פוריה, על שמו של Jean Baptiste Joseph Fourier, מתמטיקאי צרפתי שחי בין השנים 1768-1830. אנו משתמשים בטורי פוריה בכדי להציג או לקרב פונקציות המוגדרות על קטע סופי. במובן זה טורי פוריה דומים לפולינומים או לטורי חזקות, אבל הטור פוריה הוא במובן מה חזק יותר וכללי יותר. הטור פוריה הוא דוגמא אחת למערכת אורתונורמלית אינסופית סגורה במרחב עם מכפלה פנימית. הוא יישום של התאוריה שפתחנו בפרק הקודם. אך לטור פוריה יש גם תכונות ספציפיות משלו, שנלמד עליהן. הטור פוריה הוגדר לראשונה על ידי ז'אן בפטיסט ג'וזף פוריה לפני כ־200 שנה. פוריה היה מתמטיקאי ומהנדס שפיתח את הטורים הנ"ל בכדי לפתור בעיות מסוימות במשוואות דיפרנציאליות חלקיות. בסעיף האחרון בפרק נביא שימוש אחד מסוג זה. (פוריה השתתף במהפכה הצרפתית וגם פלש עם נפוליון למצריים בשנת 1798. הוא אז נחשב לאחד "החכמים" אשר לוו את נפוליון וסייעו לו בכבושיו. לתקופת מה הוא היה המושל של מצריים התחתית.)

2.1 הגדרות

על ידי E נסמן את מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין המוגדרות בקטע $[-\pi,\pi]$ והמקבלות ערכים ב־$\mathbb{C}$. נזכיר כי פונקציה $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ נקראת **רציפה למקוטעין** אם יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות ואם, בנוסף לכך, בכל נקודת אי-רציפות קיימים הגבולות החד־צדדיים (הגבול הימני והגבול השמאלי). נדגיש כי במונח "נקודת אי-רציפות" אנו כוללים גם את האפשרות שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה זו. כל נקודה x אשר בה הגבולות החד־צדדיים שונים נקראת **נקודת קפיצה** של f. ברור כי סכום (וגם מכפלה) של כל שתי פונקציות רציפות למקוטעין הוא פונקציה רציפה למקוטעין, ומכפלה של פונקציה רציפה למקוטעין בסקלר היא פונקציה רציפה למקוטעין. לכן E הוא מרחב ליניארי. כל פונקציה רציפה למקוטעין f, אשר מקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$, ניתן להציג

תמיד בצורה

$$f = u + iv$$

כאשר u ו־v הן פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. הפונקציה u נקראת **החלק הממשי** של f ורושמים $u = \mathrm{Re}(f)$. הפונקציה v נקראת **החלק המדומה** של f ורושמים $v = \mathrm{Im}(f)$.

לכל $f, g \in E$ נגדיר

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \,. \tag{2.1}$$

האינטגרל קיים כי $f\cdot\bar{g}$ רציפה למקוטעין. על סמך התכונות היסודיות של האינטגרל של רימן, קל להוכיח כי זוהי מכפלה פנימית על E. לכן E הוא מרחב מכפלה פנימית. נציג מערכת אורתונורמלית סגורה ב־E. במשפט הבא נוכיח את האורתונורמליות.

משפט 2.1: סדרת הפונקציות

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin 3x,\ \cos 3x,\ \ldots\right\}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית במרחב E.

הוכחה: עלינו להוכיח כי כל שתי פונקציות שונות בסדרה הן אורתוגונליות ושהנורמה של כל פונקציה בסדרה שווה 1. נתחיל בדבר השני:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

ולכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\sin nx\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nx|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx = 1\\ \|\cos nx\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = 1 \,.\end{aligned}$$

על מנת להוכיח אורתוגונליות של כל שתי פונקציות שונות בסדרה עלינו להוכיח את חמשת הטענות הבאות:

א. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx\right\rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$

ב. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nx\right\rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$

ג. $\langle \sin mx, \cos nx\rangle = 0$, $m, n \in \mathbb{N}$

ד. $\langle \sin mx, \sin nx\rangle = 0$, $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$

ה. $\langle \cos mx, \cos nx\rangle = 0$, $m \neq n$, $m,n \in \mathbb{N}$.

כל אחת מן הטענות האלה היא תרגיל קל בפני עצמו. נוכיח שתיים מתוכן כדוגמאות. נתחיל בטענה א':

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]\\ &= \frac{-\cos n\pi + \cos n(-\pi)}{n\pi\sqrt{2}} = 0\end{aligned}$$

נוכיח עכשיו את טענה ה'. יהיו $m,n \in \mathbb{N}$ ו־ $m \neq n$. אזי

$$\begin{aligned}\langle \cos mx, \cos nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0\end{aligned}$$

הוכחת שאר הטענות דומה. ∎

חשיבות גדולה למערכת הנ"ל נובעת מכך שהיא גם מערכת סגורה ב־ E. עובדה זו קשה להוכיח בשלב זה ולכן נוכיח אותה באופן מלא רק בסעיף 2.6. אלמלא היתה המערכת הנ"ל סגורה ב־ E, ספק אם היתה חשובה או שימושית.

בפרק הקודם נוכחנו לדעת שאם $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה אז ניתן להציג כל f על ידי "צירוף ליניארי אינסופי" שצורתו הכללית היא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, e_n\rangle\, e_n\ .$$

נבדוק בדיוק מהם איברי הטור $\langle f, e_n\rangle\, e_n$ במקרה של המערכת שלנו:

1. אם $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ אזי

$$\langle f, e_n\rangle\, e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\ .$$

2. אם $e_n(x) = \sin nx$, $n = 1,2,3,\ldots$, אזי

$$\langle f, e_n\rangle\, e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx\ .$$

3. אם $e_n(x) = \cos nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$, אזי

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \right) \cos nx .$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ עבור המערכת שלנו יהיה מן הצורה

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \tag{2.2}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{2.3}$$

ניתן לטור זה שם פורמלי.

הגדרה 2.2: תהי f פונקציה נתונה השייכת ל־E. הטור (2.2) המתאים ל־f, כאשר ה־a_n וה־b_n הוגדרו ב־(2.3), נקרא **הטור פורייה (Fourier Series)** של f ונסמן עובדה זו על ידי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הערות

א. כתיבת הקבוע החופשי של הטור בצורה $\frac{a_0}{2}$ היא נוחה מאחר והמספר a_0 מתקבל מהנוסחה הכללית של a_n ב־(2.3) (שהרי $\cos 0 = 1$). על כל פנים, הנוסחה עבור a_0 היא: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

ב. בהגדרת הטור פוריה של f רשמנו $\sim$ ולא שוויון מדויק מאחר ואין שום הכרח שהטור יתכנס עבור כל ערך של x, וגם אם הוא מתכנס עבור ערך מסוים של x, אין שום הכרח שהוא יתכנס ל־$f(x)$. עובדה זו נכונה גם כאשר f היא פונקציה רציפה על כל הקטע $[-\pi, \pi]$. נדרשים תנאים יותר חזקים על הפונקציה f בכדי להבטיח את התכנסות הטור לערכים רצויים או בכדי להבטיח שסוג ההתכנסות יהיה מצורה מסוימת (כמו התכנסות במידה שווה או התכנסות נקודתית).

ג. הטור פוריה של f נקבע לחלוטין על ידי המקדמים a_n ו־b_n (שמספרם הוא בן־מנייה). המקדמים עצמם נקבעים על ידי האינטגרלים המסוימים שבנוסחאות (2.3). ברור שאם נשנה את ערכי הפונקציה f במספר סופי של נקודות אז היא נשארת בתוך המרחב E

וגם האינטגרלים המסוימים לא ישתנו כתוצאה מכך. מכאן שלכל שתי פונקציות בתוך E, השונות אחת מן השניה במספר סופי של ערכים, יש אותו טור פוריה.

ד. הטור (2.2) של כל פונקציה $f \in E$, במידה והוא מתכנס לכל x, מגדיר למעשה פונקציה מחזורית על כל $\mathbb{R}$, אשר מחזורה הוא 2π (כלומר מקיים $g(x+2\pi) = g(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$). עקב כך, נוח לפעמים לחשוב כי f עצמה היא פונקציה מחזורית המוגדרת על כל $\mathbb{R}$, ושמחזורה גם הוא 2π, או לחלופין ש־f היא פונקציה המוגדרת על מעגל היחידה, כאשר x מציין את הזוית המתאימה לנקודה על המעגל.

ה. הנורמה שנובעת מן המכפלה הפנימית שהגדרנו בנוסחה (2.1) היא

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

לנורמה זו (ולמכפלה הפנימית) על E חסרה התכונה שאם $\|f\| = 0$ אז f היא זהותית אפס. מה שנכון הוא שאם $\|f\| = 0$ אז f זהותית אפס, פרט אולי למספר סופי של נקודות. על הקורא לזהות בין פונקציות ב־E הנבדלות רק במספר סופי של נקודות (ראה הערה ג').

מההגדרה של הטור פוריה ניתן לראות שהתהליך המתאים לפונקציה את הטור פוריה שלה הוא תהליך ליניארי. כלומר, אם $f, g \in E$ אז הטור פוריה של $f + g$ שווה לטור פוריה של f ועוד הטור פוריה של g (במובן של סכום המקדמים). אם $a \in \mathbb{C}$ אז הטור פוריה של af שווה לטור פוריה של f כפול a (כלומר, מקדמי הטור פוריה של af מתקבלים על ידי הכפלת המקדמים של הטור פוריה של f בסקלר a). שתי התכונות האלה נובעות בקלות מן התכונות הבסיסיות של האינטגרל המסוים.

לפני שנלמד על תכונות שונות של הטור פוריה, נחשב את הטור פוריה של מספר פונקציות פשוטות.

דוגמה 1: תהי $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$. ברור כי f נמצאת ב־E. נפתח את הטור פוריה שלה. נציין, שכמו במקרים רבים, נצטרך (ורצוי) לחשב את המקדמים a_0 ו־a_n ($n \geq 1$) בנפרד.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

עבור $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0 \end{aligned}$$

נציין כי את שתי התוצאות הללו יכולנו לקבל מייד מן האי-זוגיות של הפונקציות x ו־$x\cos nx$ בקטע $[-\pi,\pi]$. לעובדה זו נחזור בסעיף 2.2. נעבור עכשיו לחישוב המקדמים b_n, $n\ge 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{-2\pi\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

לכן הטור פוריה של $f(x)=x$ נתון על ידי

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

כבר בדוגמא ראשונה זו רואים שהטור אינו שווה לפונקציה בכל נקודה של הקטע $[-\pi,\pi]$. בקצות הקטע $x=\pm\pi$ הטור מתאפס ואילו הפונקציה עצמה אינה מתאפסת בנקודות אלה. אבל, כפי שנוכיח בהמשך, הטור כן מתכנס ל־x בכל נקודה פנימית של הקטע.

דוגמה 2: הטור פוריה של הפונקציה $f(x)=5-3\sin 2x+8\cos 3x$ זהה לפונקציה עצמה (ולכן הוא סופי במקרה זה). ניתן לקבל תוצאה זו גם על ידי חישוב. אך החישוב כאן מיותר לחלוטין (מדוע?). באופן כללי, כל פונקציה מן הצורה

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_n\cos nx+\sum_{n=1}^{M}B_n\cos nx$$

כאשר M הוא מספר טבעי ו־$A_M\neq 0$ או $B_M\neq 0$, נקראת **פולינום טריגונומטרי ממעלה** M. לגבי כל פונקציה כזו, הטור פוריה שלה זהה לה. זאת אומרת, המקדמים שלו יהיו:

$$b_n=\begin{cases} B_n, & n\le M \\ 0, & n>M\end{cases} \qquad a_n=\begin{cases} A_n, & n\le M \\ 0, & n>M\end{cases}.$$

דוגמה 3: תהי $f(x)=|x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$. ברור ש־$f\in E$. נחשב את הטור פוריה של f. נתחיל בחישוב של המקדמים a_n:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\pi$$

עבור $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ אי-זוגי} \\ 0, & n \text{ זוגי} \end{cases} \end{aligned}$$

עבור $n \ge 1$ ניתן לבדוק כי $b_n = 0$ (ראה גם סעיף 2.2). לכן הטור פוריה של $f(x) = |x|$ נתון על ידי

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

אחת מהתכונות הבסיסיות של מערכת אורתונורמלית קשורה לקירוב הטוב ביותר של וקטור נתון על ידי וקטור השייך לתת-מרחב הנפרש על ידי חלק מאיברי המערכת (ראה משפט 1.17). תרגום פשוט של משפט 1.17 למקרה של טורי פוריה נותן את התוצאה הבאה:

משפט 2.3: תהי $f \in E$. אזי לכל $m \in \mathbb{N}$, המינימום של הביטוי

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)\right]\right|^2 dx$$

כפונקציה של המשתנים A_n ו־B_n (ב־$\mathbb{C}$), מתקבל בנקודות $A_n = a_n$ ו־$B_n = b_n$, כאשר a_n ו־b_n הם המקדמי פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

נשתמש בעובדה זו בהמשך.

תרגילים

1. מצא את הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. $f(x) = |\sin x|$.

ב. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ e^x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

ג. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

ד. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

2. עבור כל ממשי $-\pi \le p \le \pi$, מצא את הטור פוריה של הפונקציה

$$.f_p(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le p \\ 1, & p < x \le \pi \end{cases}$$

3. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. נגדיר $g(x) = f(x+\pi)$, לכל $x \in \mathbb{R}$, ויהי

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של g בקטע $[-\pi, \pi]$. בטא את A_n ו־ B_n על ידי a_n ו־ b_n.

ב. נגדיר $h(x) = f(x)\cos x$, ויהי

$$h(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx]$$

הטור פוריה של h בקטע $[-\pi, \pi]$. בטא את α_n ו־ β_n על ידי a_n ו־ b_n.

4. תהי θ זוית נתונה. הוכח כי הקבוצה

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(x+\theta), \quad \sin(x+\theta), \quad \cos(2x+\theta), \quad \sin(2x+\theta), \quad \ldots \right\}$$

היא מערכת אורתונורמלית במרחב E ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

5. תהי $f \in E$ ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. הוכח כי קיימת סדרה $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ וסדרה $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$

כך ש־ $-\frac{\pi}{2} < \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}$ ו־

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \alpha_n)$$

ובאופן דומה, קיימת סדרה $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ וסדרה $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־ $-\frac{\pi}{2} < \beta_n \leq \frac{\pi}{2}$ ו־

$$.f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx + \beta_n)$$

2.2 זוגיות, אי-זוגיות, ודוגמאות נוספות

פיתוח הטור פוריה של פונקציה נתונה הוא פשוט יותר כאשר הפונקציה זוגית או אי-זוגית. נזכור כי פונקציה f נקראת **זוגית סביב לנקודה** $a = x$ אם לכל x (מתאים) מתקיים

$$.f(a - x) = f(a + x)$$

נאמר ש־ f **אי-זוגית סביב לנקודה** $a = x$ אם לכל x מתקיים

$$.f(a - x) = -f(a + x)$$

במידה ולא נזכיר את הנקודה $x = a$ אז נתכוון למקרה השכיח בו $a = 0$. במקרה זה f היא זוגית אם לכל x, $f(-x) = f(x)$, ו־ f אי-זוגית אם לכל x, $f(-x) = -f(x)$. הדוגמאות הסטנדרטיות לפונקציות זוגיות הן

$$f(x) = x^{2n}, \quad f(x) = \cos nx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ולפונקציות אי-זוגיות הן

$$.f(x) = x^{2n-1}, \quad f(x) = \sin nx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

מכאן מקור השמות "זוגית" ו־"אי-זוגית". מתכונות הכפל ב־ -1 נובעות התכונות הבאות של פונקציות זוגיות ואי-זוגיות.

א. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

ג. מכפלה של פונקציה אי-זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ד. אם g היא פונקציה אי-זוגית אזי לכל $b>0$,

$$\int_{-b}^{b} g(x)dx = 0 .$$

ה. אם g היא פונקציה זוגית אזי לכל $b>0$,

$$\int_{-b}^{b} g(x)dx = 2\int_{0}^{b} g(x)dx .$$

מן התכונות האלה נקבל את התוצאות הבאות, שמראות שבמקרה של זוגיות או אי-זוגיות חצי ממקדמי הטור מתאפסים.

טענה 2.4: תהי f פונקציה במרחב E.

א. אם f זוגית אזי הטור פוריה של f הוא

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx .$$

טור כזה נקרא **טור קוסינוסים**.

ב. אם f היא פונקציה אי-זוגית אזי הטור פוריה של f הוא

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx .$$

טור כזה נקרא **טור סינוסים**.

דוגמה 4: תהי $f(x)=\operatorname{sign}(x)$ פונקצית הסימן בקטע $[-\pi,\pi]$. כלומר

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \pi \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases} .$$

ברור כי f היא פונקציה אי-זוגית ולכן $a_n = 0$ לכל n! את המקדמים b_n נצטרך לחשב.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} 0, & \text{זוגי } n \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{אי-זוגי } n \end{cases} \end{aligned}$$

מכאן ש-

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x.$$

דוגמה 5: תהי $f(x) = x^2$ בקטע $[-\pi, \pi]$. ברור כי f היא פונקציה זוגית ולכן $b_n = 0$ לכל n! את המקדמים a_n יש לחשב. נתחיל במקרה בו $n \geq 1$. את החישוב של a_n נבצע על ידי שימוש כפול באינטגרציה לפי חלקים.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 2x\sin nx\, dx\right] = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx \\ &= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right] \\ &= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

עכשיו נחשב את a_0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

מכאן ש-

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

תרגילים

1. מצא את הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x|x|$ **ב.** $f(x) = \pi^2 - x^2$ **ג.** $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

2. מצא את הטור פוריה של $f_p(x) = \cos px$, עבור $0 \leq p \leq \pi$.

3. תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. נגדיר את שתי הפונקציות

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

מצא את הטור פוריה של g ואת הטור פוריה של h בקטע $[-\pi, \pi]$.

2.3 טור פוריה מרוכב

עד עתה עסקנו במערכת אורתונורמלית המורכבת מהפונקציות הממשיות $\sin nx$ ו־$\cos nx$. נציג עכשיו מערכת אורתונורמלית חשובה אשר איבריה הם פונקציות מרוכבות דווקא. המכפלה הפנימית הפעם תהיה קצת שונה

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx .$$

נזכור את נוסחת אוילר אשר לפיה, עבור כל $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x .$$

קל מאוד להוכיח כי קבוצת הפונקציות $\left\{e^{inx}\right\}_{n=1}^{\infty} n = -\infty\infty$ מהווה מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל. לכן, לכל $f \in E$, הטור המתאים למערכת זו הוא מן הצורה

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.4}$$

כאשר

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots . \tag{2.5}$$

הגדרה 2.5: תהי $f \in E$. הטור (2.4) נקרא **הטור פוריה המרוכב** של f כאשר המקדמים c_n הוגדרו בנוסחה (2.5).

טור זה אינו אלא הטור פוריה הרגיל בצורה קצת שונה. בכדי לראות זאת נשים לב כי

$$\begin{aligned} e^{i0x} &= 1 \\ e^{inx} &= \cos nx + i\sin nx, \qquad n = 1,2,3,\ldots \\ e^{-inx} &= \cos nx - i\sin nx, \qquad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

יהיו a_n ו־ b_n כמו בנוסחה (2.3). אזי לכל $n = 1,2,3,\ldots$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] = \frac{a_n - ib_n}{2} \end{aligned}$$

ו־

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{aligned}$$

מכך נובע

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

לכן

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(\cos nx + i\sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i\sin nx)\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n + c_{-n})\cos nx + i(c_n - c_{-n})\sin nx\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right] \end{aligned}$$

יוצא לכן שאין שום הבדל בין הטור פוריה המרוכב של f ובין הטור פוריה הרגיל של f. למרות זאת, הטור פוריה המרוכב הוא לפעמים נוח יותר לשימוש, ולפעמים גם טבעי יותר. הוא מבליט את העובדה שניתן לראות בכל פונקציה מחזורית 2π כאילו היתה פונקציה המוגדרת על מעגל היחידה במישור המרוכב (והרי המעגל משקף את תופעת המחזוריות בצורה טובה).

דוגמה 6: נחשב את הטור פוריה המרוכב של $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$. במהלך החישוב נשתמש באינטגרציה לפי חלקים. לכל $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{xe^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} - \frac{-\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-inx}}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}+\pi e^{in\pi}}{-in}\right] \\ &= \frac{i\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n i}{n} \end{aligned}$$

עבור $n=0$,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

לכן

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i}{n}e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^n i}{n}e^{inx}.$$

נציין כי את התוצאה הזו יכולנו לקבל מן הטור פוריה של $f(x)=x$ (אותו מצאנו בדוגמא 1) ומהשוויונים $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$ ו־ $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$ (שהוכחנו למעלה).

תרגילים

1. תהי $f\in E$. מצא את הטור פוריה המרוכב של $\mathrm{Re}(f)$ על ידי שימוש בטור פוריה המרוכב של f.

2. תהי $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0 \\ e^{ix}, & 0\le x<\pi \end{cases}$. מצא את הטור פוריה המרוכב של f.

3. תהי $f\in E$, ויהי
$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$
הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi,\pi]$. חשב את הטורי פוריה המרוכבים של $f(\overline{x})$, $\overline{f(x)}$, ו־ $f(-x)$.

4. יהיו $f,g\in E$ ומחזוריות 2π, ויהיו
$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx},\qquad g(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$$

הטורי פוריה המרוכבים של f ו־g בקטע $[-\pi,\pi]$. לכל x ממשי נגדיר

$$.h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

א. הוכח כי h רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

ב. יהי $h(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של h בקטע $[-\pi,\pi]$. הוכח כי $c_n=a_nb_n$, לכל $n\in\mathbb{Z}$.

5. מצא את הטור פוריה המרוכב של $f(x)=e^x$.

6. תהי $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם f מקבלת ערכים ממשיים בלבד אזי $c_{-n}=\overline{c_n}$.

ב. אם f מקבלת ערכים מדומים בלבד אזי $c_{-n}=-\overline{c_n}$.

ג. אם f ממשית וזוגית אזי c_n ממשי.

ד. אם f ממשית ואי־זוגית אזי c_n מדומה.

2.4 התכנסות נקודתית ומשפט דיריכלה

תכונת הסגירות של המערכת האורתונורמלית הטריגונומטרית (עובדה שעדיין לא הוכחנו) מבטיחה לנו כי הטור פוריה של כל פונקציה f במרחב E מתכנס בנורמה לפונקציה f. כלומר, אם a_n ו־b_n הם מקדמי הטור פוריה של f אז

$$.\lim_{m\to\infty}\left\|f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]\right)\right\|=0$$

נוכל לרשום זאת גם כך

$$.\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]\right)\right|^2 dx=0$$

הנוסחאות האחרונות מאמתות את הרושם כי הסכומים החלקיים של הטור הולכים ומתקרבים לפונקציה f באיזשהו מובן. אך כפי שראינו כבר בדוגמא 1, אין זו בהכרח התכנסות נקודתית. בסעיף זה נציג תנאים המבטיחים שהטור פוריה של f יתכנס נקודתית ל־f. כלומר שבכל נקודה x של הקטע $[-\pi,\pi]$ יתקיים השוויון

$$.f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

בכדי להשיג סוג כזה של התכנסות נצטרך להגביל את עצמנו למחלקה יותר מצומצמת של פונקציות. גם כך ההתכנסות הנקודתית לא תמיד תתקיים בכל הנקודות בקטע (אלא רק בנקודות "הטובות" של הקטע).

נגדיר את E' להיות מרחב כל הפונקציות $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ המקיימות את התנאים הבאים:

1. $f \in E$.
2. לכל $x \in [-\pi, \pi)$, הגבול הבא קיים וסופי:
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x+)}{h}.$$
3. לכל $x \in (-\pi, \pi]$, הגבול הבא קיים וסופי:
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x-) - f(x-h)}{h}.$$

הביטויים $f(x-)$ ו־$f(x+)$ מציינים את הגבול השמאלי והגבול הימני של f בנקודה x, בהתאמה. התנאים האחרונים שקולים לקיום הנגזרות החד־צדדיות המתואמות של f בכל נקודה בקטע $[-\pi, \pi]$.

משפט 2.6: (משפט דיריכלה, Dirichlet) תהי $f \in E'$. אזי לכל $x \in (-\pi, \pi)$, הטור פוריה של f מתכנס לערך
$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$
בקצות הקטע $x = \pm\pi$ הטור מתכנס לערך
$$\frac{f(\pi-) + f((-\pi)+)}{2}.$$

הערות

א. קצות הקטע $x = \pm\pi$ אינם באמת מקרה מיוחד. אם, כפי שהזכרנו קודם, נניח כי f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$ כך שהיא מחזורית 2π, אז מן המחזוריות ברור כי $f(\pi+) = f((-\pi)+)$, ולכן
$$\frac{f(\pi-) + f(\pi+)}{2} = \frac{f(\pi-) + f((-\pi)+)}{2}.$$
הערה זהה חלה גם על הקצה השני $x = -\pi$.

ב. אם f רציפה בנקודה x אזי $f(x-) = f(x+)$, ולכן $f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. הטור

פוריה של f יתכנס לערך $f(x)$ בנקודה זו. מכאן שאם, בנוסף לתנאי המשפט, f רציפה בכל הקטע $[-\pi,\pi]$ ומקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$, אז הטור פוריה של f יתכנס בכל נקודה x בקטע $[-\pi,\pi]$ ל־$f(x)$.

הוכחת משפט דיריכלה היא ארוכה ומורכבת. לכן נוכיח קודם כל מספר טענות עזר אשר יסייעו לנו להציג אותה בצורה נוחה יותר. חלק מן הטענות האלה הן חשובות בפני עצמן, ובהמשך נשתמש בהן גם למטרות אחרות. אנו ניניח כי f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$, והיא מחזורית 2π. לכל m טבעי נסמן את הסכום החלקי של הטור פוריה של f על ידי

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cos nx+b_n\sin nx].$$

טענה 2.7: $$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt.$$

הוכחה: על פי ההגדרה של המקדמים a_n ו־b_n נקבל

$$\begin{aligned}
S_m(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)ds+\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos ns\,ds\cdot\cos nx\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ns\,ds\cdot\sin nx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}[\cos ns\cos nx+\sin ns\sin nx]\right]ds\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n(s-x)\right]ds
\end{aligned}$$

נציב $t=s-x$ ונקבל

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt.$$

לכל פונקציה מחזורית 2π, ולכל a ממשי, מתקיים השוויון

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a}g(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt$$

(נשאיר זאת לבדיקת הקורא). לכן

$$.S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt \qquad \blacksquare$$

טענה 2.8: לכל מספר טבעי m מתקיים

$$.\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

הוכחה: נשתמש בזהות הטריגונומטרית

$$.\cos\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

ממנה נובע מייד כי לכל טבעי k, ולכל ממשי t,

$$.\cos kt\sin\tfrac{1}{2}t = \tfrac{1}{2}[\sin(k+\tfrac{1}{2})t - \sin(k-\tfrac{1}{2})t]$$

לכן

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}t[\tfrac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt] &= \tfrac{1}{2}\Big[\sin\tfrac{1}{2}t + \Big(\sin\tfrac{3}{2}t - \sin\tfrac{1}{2}t\Big) \\ &\quad + \Big(\sin\tfrac{5}{2}t - \sin\tfrac{3}{2}t\Big) + \cdots + \Big(\sin(m+\tfrac{1}{2})t - \sin(m-\tfrac{1}{2})t\Big)\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\end{aligned}$$

נחלק את שני האגפים ב־$\sin\frac{1}{2}t$ ונקבל את התוצאה הדרושה. $\blacksquare$

הפונקציה $D_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt$ נקראת **גרעין דיריכלה** (Dirichlet kernel). בטענה 2.8 ראינו שלמעשה $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$. הנקודות $t = 2n\pi$, בהן המכנה מתאפס, הן נקודות אי־רציפות סליקות.

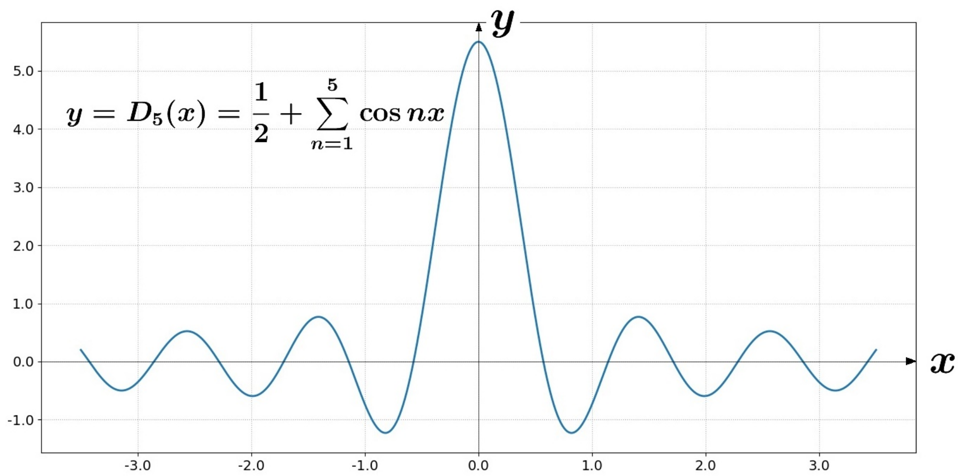
טענה 2.9: $.\int_0^{\pi} D_m(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$

הוכחה:

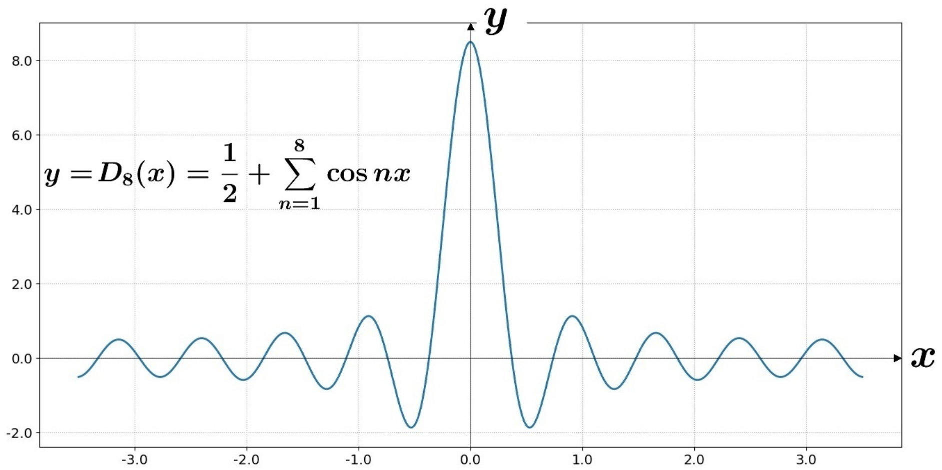
$$.\int_0^{\pi} D_m(t)\,dt = \int_0^{\pi}[\tfrac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt]\,dt$$

ברור כי לכל n טבעי $\int_0^{\pi}\cos nt\,dt = 0$, ולכן נקבל

$$.\int_0^{\pi} D_m(t)\,dt = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad \blacksquare$$



איור 2.1: גרעין דיריכלה D_5



איור 2.2: גרעין דיריכלה D_8

הטענה הבאה היא מקרה פרטי של אי-השוויון של בסל אותו הוכחנו באופן כללי במשפט 1.19.

טענה 2.10: (אי-שוויון בסל, Bessel) תהי $f \in E$ ויהיו a_n ו־ b_n המקדמים של הטור פוריה של f. אזי
$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \le \|f\|^2 .$$

הוכחה: לשם הוכחת אי-שוויון זה נסביר מדוע הוא מקרה פרטי של אי-שוויון בסל מסעיף 1.5. הצורה הכללית של אי-שוויון בסל היא

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \le \|f\|^2$$

כאשר $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית. במקרה שלנו עבור $f \in E$,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\ .$$

עבור $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\langle f, e_n\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx\right|^2 = \left|\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{|a_0|^2}{2}.$$

אם $e_n(x) = \cos nx$, $n \geq 1$, אז:

$$|\langle f, e_n\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right|^2 = |a_n|^2$$

ובאותו אופן, אם $e_n(x) = \sin nx$ אז $|\langle f, e_n\rangle| = |b_n|$. לכן הנוסחה שרשמנו בטענה 2.10 היא אכן אי-שוויון בסל. ∎

הטענה הבאה היא מקרה פרטי של הלמה של רימן-לבג (ראה משפט 1.20) שנובעת בקלות מאי-שוויון בסל.

> **טענה 2.11: (הלמה של רימן-לבג, Riemann-Lebesgue)** תהי $f \in E$ ויהיו a_n ו־ b_n המקדמים של הטור פוריה של f. אזי
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0\ .$$
>
> כלומר:
>
> $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx &= 0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx &= 0\ .\end{aligned}$$

> **טענה 2.12:** לכל פונקציה g הרציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$ מתקיים
>
> $$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt = 0\ .$$

הוכחה: נגדיר שתי פונקציות

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t)\cos\frac{t}{2}, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & -\pi \le t < 0 \end{cases}$$

$$.h_2(t) = \begin{cases} g(t)\sin\frac{t}{2}, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & -\pi \le t < 0 \end{cases}$$

מן הנתון ש־g רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$ נובע שגם h_1 ו־h_2 רציפות למקוטעין ב־$[-\pi,\pi]$. קל לראות ש־

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(t)\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt &= \int_0^\pi g(t)\cos\tfrac{t}{2}\sin mt\,dt + \int_0^\pi g(t)\sin\tfrac{t}{2}\cos mt\,dt \\ &= \int_{-\pi}^\pi h_1(t)\sin mt\,dt + \int_{-\pi}^\pi h_2(t)\cos mt\,dt \end{aligned}$$

על פי טענה 2.11 (הלמה של רימן-לבג), כל אחד מן האינטגרלים שבאגף ימין שואף לאפס, ומכאן נובעת התוצאה הדרושה. ■

הוכחת משפט 2.6: עלינו להוכיח שלכל x מתקיים

$$.\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$$

נבחר x כלשהו ונתייחס אליו כקבוע לאורך כל ההוכחה. נגדיר את הפונקציה

$$.g(t) = \frac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

ברור כי g רציפה למקוטעין בקטע $(0,\pi]$, ובנוסף לכך

$$\lim_{t\to0^+} g(t) = \lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to0^+}\left[\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right]\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

הגבול האחרון קיים וסופי משום ש־

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = 1$$

והגבול

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$$

קיים על סמך הגדרת E'. על פי הנחת המשפט, הגבול קיים וסופי. לכן g רציפה למקוטעין בכל הקטע $[0,\pi]$. על סמך טענה 2.12

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt=0\,.$$

מהגדרת g נקבל

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt\right]=0\,.$$

על פי טענה 2.9

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt &= f(x+)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\\ &= f(x+)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_m(t)\,dt\\ &= \frac{f(x+)}{2}\end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt=\frac{f(x+)}{2}\,.$$

משיקולים דומים ניתן לקבל גם את השוויון

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt=\frac{f(x-)}{2}\,.$$

לכן מטענות 2.7 ו־2.8 נקבל

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}S_m(x) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x+t)D_m(t)\,dt\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 f(x+t)D_m(t)\,dt+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x+t)D_m(t)\,dt\\ &= \frac{f(x-)+f(x+)}{2} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

בשלב זה ידוע לנו שאם פונקציה מקיימת את תנאי משפט דיריכלה אז הטור פוריה שלה מתכנס בכל נקודה של $\mathbb{R}$, דבר שלא ידענו קודם לכן. בנוסף לכך, הטור יתכנס לערך של הפונקציה באותה נקודה, אם הפונקציה רציפה בה. בנקודה בה הפונקציה אינה רציפה, הטור מתכנס לערך הטבעי ביותר שניתן לצפות – לממוצע של הגבולות החד־צדדיים

בנקודה.

דוגמה 7: תהי $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$. בדוגמא 1 פתחנו את הטור פוריה של f ומצאנו כי

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

על פי משפט דיריכלה, הטור מתכנס ל־x בקטע הפתוח $(-\pi,\pi)$, ומתכנס לאפס בקצות הקטע. אם, למשל, נציב בטור את הערך $x=\frac{\pi}{2}$ נקבל

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\tfrac{\pi}{2}\\ &= 2\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}-\frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4}+\cdots\right]\\ &= 2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right]\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

על ידי חישובים דומים, אם נציב בטור את הערך $x=\frac{\pi}{4}$ נקבל

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots.$$

אותה נוסחה ניתן לקבל מן הטור פוריה של $\operatorname{sign}(x)$ (ראה דוגמא 4) על ידי הצבת $x=\frac{\pi}{2}$.

דוגמה 8: בדוגמא 5 מצאנו את הטור פוריה של $f(x)=x^2$:

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

ברור כי $f(x)=x^2$ מקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[-\pi,\pi]$. יתרה מזאת, ההמשכה המחזורית 2π של f רציפה בכל נקודה של $\mathbb{R}$, ולכן נוכל לרשום למעשה:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx. \tag{2.6}$$

אם נציב $x=0$ בנוסחה האחרונה נקבל

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

ולכן

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \tag{2.7}$$

אם נציב $x=\pi$ בנוסחה (2.6) אז נקבל את הזהות

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

נציין כי את השוויון האחרון אפשר לקבל משוויון (2.7) (או להיפך) באופן הבא

$$.S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}S$$

קיבלנו $S=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}S$, ולכן $S=\frac{\pi^2}{6}$.

תרגילים

1. תהי $f(x)=1-x^2$ בקטע $[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע זה.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. לאיזה ערכים מתכנס הטור פוריה של f בנקודות $x=5\pi$ ו־ $x=6\pi$? נמק.

2. לכל מספר ממשי $p\neq 0$, תהי $f_p(x)=e^{px}$ בקטע $[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f_p(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f_p בקטע זה.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. חשב את $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ואת $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

3. תהי f פונקציה המקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[-\pi,\pi]$. חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(n-\frac{1}{2})t\,dt$

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\sin(n-\frac{1}{2})t\,dt$

4. מצא את הטור פוריה בקטע $[-\pi,\pi]$ של $f(x) = \begin{cases} x-[x], & \text{לא שלם } x \\ \frac{1}{2}, & \text{שלם } x \end{cases}$. מצא לאיזה ערך מתכנס הטור בנקודות $x=5$, $x=3$, ו־ $x=1.5$.

5. לכל מספר טבעי m, תהי $D_m(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt$.

א. חשב את $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)\sin 100t\,dt$.

ב. חשב את $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[D_m(t)]^2\,dt$, עבור $m=100$.

ג. נגדיר את הפונקציה $g(t)=\begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{2}t}{t}, & t\neq 0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \end{cases}$.

חשב את $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)g(t)\,dt$.

6. תהי $f(x)=xe^{ix}$. מצא את הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi,\pi]$ וחשב את $F(\pi)$, $F(-\pi)$, ו־ $F(\frac{\pi}{4})$. כאשר

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

הוא הטור פוריה המרוכב של f.

7. תהי

$$f(x)=\begin{cases} 2+\frac{2x}{\pi}, & -\pi<x<0 \\ 2, & 0<x<\pi \end{cases}$$

א. חשב את המקדמים a_n ו־ b_n של הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. נגדיר את הפונקציה

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx], \qquad -\infty<x<\infty.$$

בדוק את התכנסות הטור לכל ערך של x ושרטט סקיצה של הגרף של g בקטע $[-3\pi,3\pi]$.

2.5 התכנסות במידה שווה

תהי $f \in E'$ ויהיו $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו־ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקדמי הטור פוריה של f. על פי משפט דיריכלה, לכל x מתקיים

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]\right].$$

זוהי התכנסות נקודתית. בסעיף הנוכחי, נתעניין בתנאים על f אשר תחתיהם הטור פוריה של f יתכנס במידה שווה לפונקציה f. אך ראשית כל נזכיר את ההגדרות הפורמליות בכדי להבין את ההבדלים בין שני סוגי ההתכנסות האלה.

הגדרה 2.13: (התכנסות נקודתית, pointwise convergence)
תהי $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[a,b]$, ותהי f פונקציה שגם היא מוגדרת בקטע $[a,b]$. נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ **מתכנסת נקודתית** לפונקציה f בקטע $[a,b]$, אם לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$. כלומר, לכל $x \in [a,b]$, ולכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי $N(\varepsilon, x)$ כך ש־

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

עבור כל $m \geq N(\varepsilon, x)$.

הגדרה 2.14: (התכנסות במידה שווה, uniform convergence)
תהי $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[a,b]$, ותהי f פונקציה שגם היא מוגדרת בקטע $[a,b]$. נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה f בקטע $[a,b]$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי $N(\varepsilon)$ כך ש־

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

עבור כל $m \geq N(\varepsilon)$, ועבור כל $x \in [a,b]$.

שתי ההגדרות נראות דומות למדי, אך למרות זאת יש הבדל בין שני המושגים. מושג ההתכנסות במידה שווה הוא הרבה יותר חזק. אם סדרת פונקציות מתכנסת במידה שווה אז היא מתכנסת גם נקודתית לאותה הפונקציה. ההיפך אינו נכון, בדרך כלל. שני המושגים מתארים שני מצבים שונים בהם סדרת הפונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ הולכת ומתקרבת לפונקציה f. במקרה של ההתכנסות הנקודתית, מתבוננים על כל נקודה x של הקטע $[a,b]$ בנפרד ודורשים שלכל $\varepsilon > 0$ יהיה קיים $N(\varepsilon, x)$, התלוי גם ב־x! יתכן בהחלט

שאותו $N(\varepsilon, x)$ לא יתאים עבור נקודה אחרת x' בקטע. במקרה של התכנסות במידה שווה, לעומת זאת, נקודת המבט היא גלובלית. לכל $\varepsilon > 0$, קיימת דרישה למספר $N(\varepsilon)$ אשר יתאים לכל x בקטע! נסתכל על דוגמא פשוטה: נניח ש־$f_m(x) = x^m$ בקטע $[0,1]$. קל לראות כי הסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

אך, לעומת זאת, הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה ל־f בקטע $[0,1]$. סיבה אחת לכך היא שלכל m קיים x_m כך ש־$f_m(x_m) = \frac{1}{2}$. לכן אם נקח, למשל, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, הרי שלא קיים שום N העונה לדרישת ההגדרה. באופן כללי: אם סדרת פונקציות רציפות מתכנסת נקודתית לפונקציה לא רציפה, אז ההתכנסות אינה במידה שווה (מדוע?).

נחזור לפונקציה f שבתחילת הסעיף. נתבונן בסכומים החלקיים של הטור פוריה שלה:

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

זהו סכום סופי של פונקציות רציפות, ולכן S_m היא פונקציה רציפה עבור כל m. בנוסף לכך מתקיים $S_m(-\pi) = S_m(\pi)$, לכל m. לכן תנאי הכרחי לכך שהסדרה $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ תתכנס במידה שווה לפונקציה f על כל הקטע $[-\pi,\pi]$ הוא שהפונקציה f תהיה רציפה בכל הקטע, ובנוסף לכך תקיים $f(-\pi) = f(\pi)$. כל זה מוביל אותנו למשפט הבא.

משפט 2.15: אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, ו־$f' \in E$, אזי הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה ל־f על כל הקטע.

הערה: שים לב כי התנאי $f' \in E$ גורר כי $f \in E'$.

הוכחה: מאחר ו־$f' \in E$ הרי שיש ל־f' טור פוריה

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

וכמובן ל־f עצמה קיים טור פוריה

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

נבטא את המקדמים α_n ו־β_n באמצעות המקדמים a_n ו־b_n. במהלך החישובים, נשתמש בעובדה ש־f רציפה ו־$f(-\pi) = f(\pi)$.

א.

$$.\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2} = 0$$

ב. עבור $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)n\sin nx\,dx\right] \\ &= \tfrac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\ &= nb_n\end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,n\cos nx\,dx\right] \\ &= -na_n\end{aligned}$$

לכן נוכל לרשום

$$.f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n\cos nx - na_n\sin nx$$

המשימה הבאה שלנו תהיה להוכיח שטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}$ מתכנס (זה אינו הטור המופיע באי-שוויון בסל).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2+\left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}$$

מאי-שוויון קושי־שוורץ (ראה דוגמא 10) נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}$$

ולכן

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}$$

ידוע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ומאי-שוויון בסל (טענה 2.10) נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\le\|f'\|^2<\infty\ .$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}$ מתכנס. מעובדה זו, וממבחן ההשוואה להתכנסות טורים, נובע מייד כי כל אחד מן הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ו־$\sum_{n=1}|b_n|$ מתכנס כי

$$|a_n|,\ \ |b_n|\le\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}\ .$$

משתי העובדות האחרונות, וממבחן M של ויארשטראס להתכנסות במידה שווה של טורי פונקציות, נובע כי כל אחד מטורי הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$, מאחר ולכל n,

$$|a_n\cos nx|\le|a_n|,\qquad |b_n\sin nx|\le|b_n|\ .$$

לכן גם הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$. מאחר ו־$f'\in E$, הרי ש־f מקיימת את תנאי משפט דיריכלה, ולכן הטור פוריה של f מתכנס נקודתית ל־f בכל נקודה ב־$[-\pi,\pi]$. אזי הוא מתכנס ל־f במידה שווה על כל הקטע. ∎

נעבור עתה לשאלת ההתכנסות במידה שווה של טור פוריה בתתי-קטעים $[a,b]$ של $[-\pi,\pi]$, גם במקרה בו ל־f יש נקודות קפיצה. ברור שאם תת-קטע $[a,b]$ מכיל נקודת קפיצה של f אז הטור פוריה של f אינו מתכנס ל־f במידה שווה מקטע $[a,b]$. אנו נוכיח שאם $f'\in E$, ואם התת-קטע $[a,b]$ אינו מכיל אף נקודת אי-רציפות של f, אזי הטור פוריה של f מתכנס ל־f במידה שווה בקטע $[a,b]$. נתחיל בדוגמא פרטית חשובה אשר ממנה תנבע התוצאה הכללית. תהי $\phi(x)=x$, לכל $-\pi<x<\pi$, ו־$\phi(-\pi)=\phi(\pi)=0$. נניח כי ϕ מוגדרת על כל $\mathbb{R}$ באופן מחזורי 2π. מדוגמא 1 וממשפט דיריכלה (משפט 2.6) נובע שלכל x ממשי מתקיים השוויון

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\ .$$

כלומר, הטור פוריה מתכנס נקודתית ל־ϕ על כל הקטע $[-\pi,\pi]$. אבל ההתכנסות אינה במידה שווה מאחר ו־ϕ אינה רציפה בנקודות $x=\pm\pi$. בטענה הבאה נוכיח שהטור פוריה של ϕ מתכנס במידה שווה בכל תת-קטע סגור אשר אינו כולל בתוכו את הנקודות π או $-\pi$.

טענה 2.16: לכל $0<b<\pi$, הטור פוריה של ϕ מתכנס ל־ ϕ במידה שווה בקטע $[-b,b]$.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות במידה שווה של טור פונקציות. נסמן כרגיל

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

יהי $\varepsilon>0$. עלינו להוכיח שקיים $N(\varepsilon)$ טבעי כך ש־ $|S_m(x)-S_k(x)|<\varepsilon$, לכל $m,k\geq N(\varepsilon)$, ולכל x בקטע $[-b,b]$. למטרה זו נתבונן בפונקציה $\cos\frac{x}{2}$ בקטע $[-b,b]$. פונקציה זו מקבלת ערך מינימלי $\cos\frac{b}{2}>0$ (שמתקבל בשתי קצות הקטע). יהיו m ו־ k שני מספרים טבעיים כך ש־ $k<m$. לכן

$$|S_m(x)-S_k(x)|=2\left|\frac{\sin(k+1)x}{k+1}-\frac{\sin(k+2)x}{k+2}+\cdots\pm\frac{\sin mx}{m}\right|.$$

נכפול את אגף ימין ב־ $\cos\frac{x}{2}$ ונשתמש בזהות

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

$$\begin{aligned}
&2\cos\frac{x}{2}\left[\frac{\sin(k+1)x}{k+1}-\frac{\sin(k+2)x}{k+2}+\cdots\pm\frac{\sin mx}{m}\right]=\\
&=\left[\frac{\sin(k+\frac{3}{2})x}{k+1}+\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{k+1}\right]-\left[\frac{\sin(k+\frac{5}{2})x}{k+2}+\frac{\sin(k+\frac{3}{2})x}{k+2}\right]\\
&\quad+\cdots\pm\left[\frac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{m}+\frac{\sin(m-\frac{1}{2})x}{m}\right]
\end{aligned}$$

נסמן $c=\cos\frac{b}{2}$. מאחר ו־ $\cos\frac{x}{2}\geq c$, לכל x בקטע $[-b,b]$, ומאחר ו־ $|\sin\alpha|\leq 1$, לכל α ממשי, נקבל על ידי חישוב קל שלכל x בקטע $[-b,b]$ יתקיים

$$|S_m(x)-S_k(x)|\leq\tfrac{1}{c}\left[\tfrac{1}{k+1}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)}+\tfrac{1}{(k+2)(k+3)}+\cdots+\tfrac{1}{(m-1)m}+\tfrac{1}{m}\right].$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ הוא טור מתכנס ולכן קיים מספר טבעי $N(\varepsilon)$ כך שלכל $k\geq N(\varepsilon)$,

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<\frac{c\varepsilon}{2}.$$

בנוסף לכך נוכל להניח שלכל $r\geq N(\varepsilon)$, $\frac{1}{r}<\frac{c\varepsilon}{4}$. לכן, עבור כל $m>k\geq N(\varepsilon)$, ועבור

כל x בקטע $[-b,b]$,

$$|S_m(x)-S_k(x)| \le \frac{1}{c}\left[\frac{1}{k+1}+\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{m}\right] < \frac{1}{c}\left[\frac{c\varepsilon}{4}+\frac{c\varepsilon}{2}+\frac{c\varepsilon}{4}\right]=\varepsilon.$$

אזי סדרת הפונקציות $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ מקיימת את הקריטריון של קושי להתכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות, ולכן היא מתכנסת במידה שווה לפונקציה $\phi(x)=x$ בקטע $[-b,b]$.
■

עתה נוכל להוכיח את התוצאה העקרית.

משפט 2.17: תהי f פונקציה כך ש־$f,f'\in E$ ויהיו

$$-\pi<d_1<d_2<\cdots<d_n\le\pi$$

כל נקודות הקפיצה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. אם $[a,b]$ הוא תת-קטע של $[-\pi,\pi]$ אשר אינו מכיל אף אחת מן הנקודות d_k, אזי הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה ל־f בקטע זה.

הוכחה: לכל $1\le k\le n$, נסמן $z_k=f(d_k+)-f(d_k-)$, ונגדיר את הפונקציה

$$g(x)=f(x)+\tfrac{z_1}{2\pi}\phi(x+\pi-d_1)+\tfrac{z_2}{2\pi}\phi(x+\pi-d_2)+\cdots+\tfrac{z_n}{2\pi}\phi(x+\pi-d_n).$$

כאשר ϕ הוגדרה בטענה 2.16 בקטע $[-\pi,\pi]$ והיא מחזורית 2π. קל לבדוק ש־g רציפה בכל הקטע $[-\pi,\pi]$, פרט לנקודות d_k, $1\le k\le n$, שהן נקודות אי-רציפות סליקות של g. לכן נוכל להניח ש־g רציפה בכל הקטע $[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$, ו־$g'\in E$. לכן על פי משפט 2.15, הטור פוריה של g מתכנס במידה שווה על כל הקטע $[-\pi,\pi]$. מטענה 2.16 נובע כי הטור פוריה של ϕ מתכנס במידה שווה ל־ϕ בכל תת-קטע סגור של $[-\pi,\pi]$ שאינו כולל את הנקודות $x=\pm\pi$. לכן הטור פוריה של $\phi(x+\pi-d_k)$ (אשר מתקבל על ידי הזזה פשוטה של הטור פוריה של ϕ) יתכנס במידה שווה בכל תת-קטע סגור של $[-\pi,\pi]$ אשר אינו כולל את הנקודה $x=d_k$. עובדה זו כמובן נכונה גם לפונקציה $\frac{z_k}{2\pi}\phi(x+\pi-d_k)$. נתון לנו שהקטע $[a,b]$ אינו מכיל אף אחת מן הנקודות $x=d_k$, $1\le k\le n$, ולכן הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות $\frac{z_k}{2\pi}\phi(x+\pi-d_k)$ מתכנסת בו במידה שווה. עכשיו

$$f(x)=g(x)-\left[\frac{z_1}{2\pi}\phi(x+\pi-d_1)+\cdots+\frac{z_n}{2\pi}\phi(x+\pi-d_n)\right]$$

ולכן הטור פוריה של f (שמתקבל על ידי החסרת סכום הטורי פוריה של הפונקציות

$\frac{z_k}{2\pi}\phi(x+\pi-d_k)$ מן הטור פוריה של g) מתכנס במידה שווה ל־f בקטע $[a,b]$. ∎

תרגילים

.1 תהי $f(x)=\begin{cases} Ax+B, & -\pi\le x<0 \\ \cos x, & 0\le x\le\pi \end{cases}$. עבור אילו ערכים של A ו־B יתכנס הטור פוריה של f במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

.2 תהי $g(x)=\begin{cases} \cos x, & -\pi< x<0 \\ \sin x, & 0< x<\pi \end{cases}$.

א. חשב את הטור פוריה של g בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. נגדיר את הפונקציה

$$h(x)=\int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt + a\sin\frac{x}{2}, \qquad -\pi\le x\le\pi.$$

עבור איזה ערכים של a הטור פוריה של h יתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

.3 הוכח כי לכל $-\pi\le x\le\pi$, ולכל $a\notin\mathbb{Z}$,

$$\cos ax=\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a\sin\pi a}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx$$

על סמך זאת הוכח כי

$$\cot\pi a=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2-a^2}\right]$$

.4 תהי $f\in E$ ויהי

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. הראה שאם קיימים קבועים c ו־d כך שלכל n

$$|a_n|\le\frac{c}{n^2}, \qquad |b_n|\le\frac{d}{n^2}$$

אזי f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, והטור פוריה של f מתכנס ל־f במידה שווה.

2.6 שוויון פרסבל (Marc-Antoine Parseval)

בסעיף זה נוכיח שהמרחב הליניארי E סגור ביחס לטור פוריה ולנורמה הרגילה עליו. עובדה זו שקולה (ראה טענה 1.24) לשוויון פרסבל עבור כל $f \in E$. ננסח את המשפט במונחים של שוויון פרסבל (Marc-Antoine Parseval).

משפט 2.18: (שוויון פרסבל, Parseval's identity) לכל $f \in E$ מתקיים השוויון

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2 \tag{2.8}$$

כאשר ה־a_n וה־b_n הם המקדמי פוריה של f.

בדיון שבהוכחת טענה 2.10 (אי-שוויון בסל) ראינו מדוע הנוסחה (2.8) היא התרגום של שוויון פרסבל (טענה 1.24) למקרה המיוחד של טורי פוריה. כפי שראינו בהוכחת טענה 1.24, שוויון פרסבל שקול לתכונת הסגירות. כלומר, בכדי להוכיח את משפט 2.18 יהיה מספיק להוכיח שלכל $f \in E$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_m(x)|^2dx = 0\,. \tag{2.9}$$

נעשה זאת בשני שלבים. בשלב הראשון נוכיח ששוויון (2.9) מתקיים לכל פונקציה f שמקיימת את תנאי משפט 2.15. בשלב השני נוכיח שאפשר להתקרב לכל $f \in E$ על ידי פונקציות המקיימות את תנאי משפט 2.15, ולבסוף נקבל את שוויון פרסבל.

טענה 2.19: אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, ו־$f' \in E$, אזי

$$\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\| = 0\,.$$

הוכחה: ממשפט 2.15, הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה ל־f על $[-\pi,\pi]$. לכן, לכל $\varepsilon > 0$ נתון, קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $x \in [-\pi,\pi]$ ועבור כל $m \geq N(\varepsilon)$

$$|f(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$$

לכן עבור כל $m \geq N(\varepsilon)$

$$\|f - S_m\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_m(x)|^2dx \leq 2\varepsilon^2\,.$$

כלומר $\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\|^2 = 0$. ∎

טענה 2.20: תהי $f \in E$, ויהי $\varepsilon > 0$. קיימת פונקציה g רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ כך ש־ $g(-\pi) = g(\pi)$, $g' \in E$, ו־ $\|f - g\| < \varepsilon$.

הוכחה: אם נתבונן בהגדרת האינטגרל של רימן, נמצא שעבור $f \in E$ ו־ $\varepsilon > 0$ קיימות $n+1$ נקודות (n תלוי ב־ ε)

$$-\pi = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = \pi$$

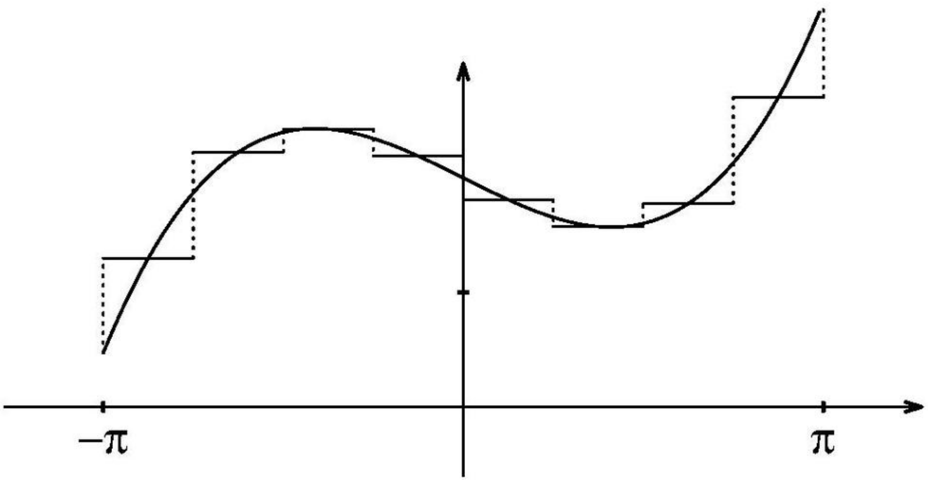
וקיימים n ערכים c_k, $1 \le k \le n$, כך שפונקציית המדרגות

$$h(x) = c_k, \qquad d_{k-1} < x \le d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

מקיימת

$$\|f - h\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

המחשה ויזואלית של מצב זה נתונה בציור 2.3.



איור 2.3: קירוב פונקציה רציפה על ידי פונקציית מדרגות

בנוסף לכך, אם $|f(x)| \le M$ לכל x, אזי ניתן לבחור את הערכים c_k, $1 \le k \le n$, כך ש־ $|h(x)| \le M$ לכל x. הרעיון עכשיו הוא לשנות קצת את h כך שתקיים את תנאי הטענה. למטרה זו נבחר $\delta > 0$ המקיים $2\delta < d_k - d_{k-1}$, $1 \le k \le n$, ו־ $0 < \delta < \frac{\varepsilon^2 \pi}{32 n M^2}$. נגדיר פונקציה g על ידי

$$g(x) = \begin{cases} c_k, \quad d_{k-1} + \delta \le x \le d_k - \delta, \quad k = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{c_{k+1} - c_k}{2\delta}(x - d_k) + \frac{c_{k+1} + c_k}{2}, \;\; d_k - \delta < x < d_k + \delta, \;\; k = 1, \ldots, n-1 \\ \frac{c_1 - c_n}{2\delta}(x - \pi) + \frac{c_1 + c_n}{2}, \quad \pi - \delta < x < \pi + \delta \end{cases}$$

וכך ש־g מחזורית 2π. קל לבדוק ש־g רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$, ו־$g' \in E$. בנוסף

$$\begin{aligned}
\|h-g\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)-g(x)|^2dx \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{d_k-\delta}^{d_k+\delta}|h(x)-g(x)|^2dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}|h(x)-g(x)|^2dx \\
&\qquad +\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}|h(x)-g(x)|^2dx \\
&= \frac{4M^2}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\int_{d_k-\delta}^{d_k+\delta}dx+\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}dx+\int_{\pi-\delta}^{\pi}dx\right] \\
&= \frac{8nM^2\delta}{\pi} \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

לכן

$$\|f-g\| \le \|f-h\|+\|h-g\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \blacksquare$$

הוכחת משפט 2.18: יהיו $f \in E$ ו־$\varepsilon > 0$. על פי טענה 2.20 קיימת פונקציה g המקיימת את תנאי טענה 2.20 כך ש־

$$\|f-g\| < \varepsilon\,.$$

גם כן, קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $m \ge N(\varepsilon)$,

$$\|g-T_m\| < \varepsilon$$

כאשר T_m הוא הסכום החלקי של הטור פוריה של g. לכן עבור כל $m \ge N(\varepsilon)$ מתקיים:

$$\|f-T_m\| \le \|f-g\|+\|g-T_m\| < 2\varepsilon\,.$$

על פי משפט 2.3

$$\|f-S_m\| \le \|f-T_m\|\,.$$

אזי לכל $m \ge N(\varepsilon)$, $\|f-S_m\| < 2\varepsilon$, ולכן $\lim_{n\to\infty}\|f-S_m\|=0$. $\blacksquare$

דוגמה 9: בדוגמא 5 מצאנו את הטור פוריה של $f(x)=x^2$:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx\,.$$

לכן על פי שוויון פרסבל

$$.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

קל למצוא ש־ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}$, ועל ידי חישוב פשוט נוסף נקבל

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

קבלנו לכן חישוב של סכום טור מספרי, אשר חישובו על ידי הכלים האלמנטריים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי קשה יותר. נוכל לחשב עוד מספר טורים מספריים דומים על ידי שימוש בתוצאה זו. נחשב לדוגמא את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\\ &= \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{540}\end{aligned}$$

מסקנה מיידית משתי הטענות והמשפט של סעיף זה היא שגם המערכת $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב־E. לא קשה לראות כי שוויון פרסבל המתאים למערכת זו הוא:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

כאשר $f \in E$ ו־ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הוא הטור פוריה המרוכב של f.

דוגמה 10: נתבונן בטור פוריה המרוכב של $f(x) = e^x$. לא קשה למצוא כי

$$\begin{aligned}c_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx = \tfrac{1}{2\pi}\tfrac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\\ &= \tfrac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1-in)}\end{aligned}$$

ולכן

$$.e^x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1-in)}e^{inx}$$

קל לראות כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}$. לכן על סמך שוויון פרסבל לטור פוריה מרוכב נקבל

$$\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{4\pi^2|1-in|^2} = \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}} \, .$$

ננסח עכשיו תכונה נוספת של טור פוריה שהיא הכללה של שוויון פרסבל.

טענה 2.21: (שוויון פרסבל מוכלל) לכל $f, g \in E$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{a_0\overline{c_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{c_n} + b_n\overline{d_n}$$

כאשר

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

ו־

$$g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos nx + d_n \sin nx] \, .$$

הטענה נובעת מייד מטענה 1.27 (שוויון פרסבל מוכלל). אם נציב בטענה זו $f = g$ אז נקבל את שוויון פרסבל כמסקנה פרטית.

לסיום הסעיף נביא מסקנה נוספת שיוצאת מן השוויון של פרסבל. המסקנה מאשרת את הטענה הטבעית שאם לשתי פונקציות יש אותו טור פוריה אז הן למעשה זהות. אם המדובר בשתי פונקציות השייכות ל־E', אז טענה זו היא מסקנה מיידית ממשפט דיריכלה (משפט 2.6). לגבי פונקציות השייכות ל־E בלבד אנו זקוקים לשוויון פרסבל.

טענה 2.22: (יחידות הטור פוריה) אם $f, g \in E$ ואם הטור פוריה של f שווה לטור פוריה של g אז $f(x) = g(x)$ בכל נקודה x פרט אולי למספר סופי של נקודות.

הוכחה: המקדמים בטור פוריה של $f - g$ הם כולם זהותית אפס. אזי משוויון פרסבל

$$\|f-g\| = 0 \, .$$

מתכונות הנורמה נובע ש־$f = g$, חוץ אולי ממספר סופי של נקודות (ראה הערה ה' לאחר הגדרה 2.2). ∎

תרגילים

1. חשב את האינטגרל

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{inx} \right|^2 dx .$$

2. תהי $f \in E$ ויהי

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$$

במונחים של a_n ו־ b_n.

3. לכל n טבעי נגדיר את הפונקציה

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} [\cos kx - \sin kx]$$

חשב את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^2 dx$.

4. תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את הסכום $I = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, כאשר נתון $f(x) = e^{-x}$.

2.7 תופעת גיבס (J. Willard Gibbs)

בסעיף 2.5 נסחנו תנאים מספיקים לכך שהטור פוריה יתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ או בתת-קטע סגור שלו. התכנסות במידה שווה היא כמובן צורת ההתכנסות הרצויה ביותר, אך היא אינה מתקיימת תמיד. בסעיף זה נדון במצבים אחרים, בהם הטור אינו מתכנס במידה שווה.

תהי f פונקציה מחזורית 2π המקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן את נקודות הקפיצה של f על ידי

$$-\pi < d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq \pi \,.$$

בסעיף קודם (ראה משפט 2.17) הוכחנו כי תחת תנאים מסוימים הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה בכל תת-קטע סגור $[a,b]$ של $[-\pi,\pi]$ אשר לא כולל בתוכו אף אחת מן הנקודות הנ"ל. אבל בסביבת הנקודות d_k, $1 \leq k \leq n$, קיימת תופעה לא טובה הנקראת "תופעת גיבס" על שמו של הפיזיקאי והכימאי Josiah Willard Gibbs.

תופעה זו התגלתה על ידי הפיזיקאי מיכלסון (Albert A. Michelson) בסוף המאה הקודמת. הוא בנה מכונה שנועדה לצייר את הגרפים של הסכומים החלקיים S_m. מיכלסון מצא שעבור פונקציות "טובות" (למשל כאלה המקיימות את תנאי משפט 2.15) הגרפים של S_m קרובים מאוד לפונקציה f. לעומת זאת, עבור פונקציה כמו $f(x) = x$ התקבלו שגיאות גדולות יחסית בסביבת הנקודות $x = \pm\pi$. ההסבר הראשון להתנהגות זו ניתן על ידי גיבס (J. Gibbs) אשר אישר בכך את הטענה ששגיאות אלה לא נגרמו כתוצאה מטעות במכונה של מיכלסון. לכן התופעה נקראת כיום על שמו. מה שמעניין בתופעה זו היא העובדה שאותו סדר גודל של שגיאה חוזר על עצמו בכל נקודת אי-רציפות של כל פונקציה $f \in E'$.

דוגמה 11: תהי $\phi(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, ו־ $\phi(-\pi) = \phi(\pi) = 0$. כרגיל, נניח ש־ ϕ מוגדרת באופן מחזורי 2π על כל $\mathbb{R}$. בדוגמא 1 חישבנו את הטור פוריה של ϕ ומצאנו כי

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \,.$$

לכל m טבעי, יהי

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

הסכום החלקי של הטור פוריה של ϕ, ונתבונן בנקודה $x_m = \pi - \frac{\pi}{m}$. נחשב בקירוב את

:$T_m(x_m)$

$$.T_m(x_m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n(\pi - \tfrac{\pi}{m}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2}{n} \sin \tfrac{n\pi}{m}$$

נקבל כי

$$.T_m(x_m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2}{n} \sin \tfrac{n\pi}{m} = 2 \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin \frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}} \cdot \frac{\pi}{m}$$

מן הביטוי האחרון לא קשה לראות כי $T_m(x_m)$ הוא סכום אינטגרלי של רימן של

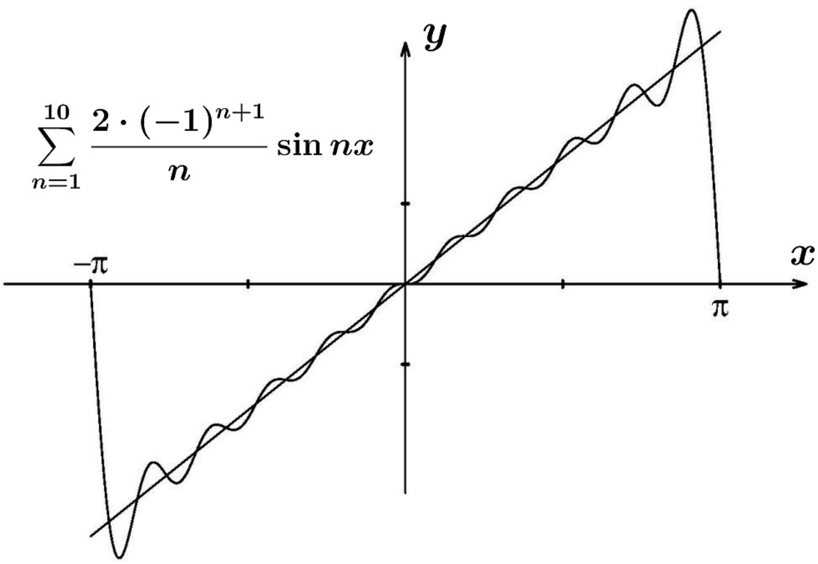
$$2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

המתקבל על ידי חלוקת הקטע $[0,\pi]$ ל־m תתי-קטעים שווים: $\left[\frac{(n-1)\pi}{m}, \frac{n\pi}{m}\right]$, $1 \le n \le m$. אורכו של כל תת-קטע הוא $\frac{\pi}{m}$, ומתוך כל קטע כזה בוחרים את נקודת הקצה הימנית $\frac{n\pi}{m}$, $1 \le n \le m$. לכן

$$.\lim_{m\to\infty} T_m(x) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1.18\pi$$

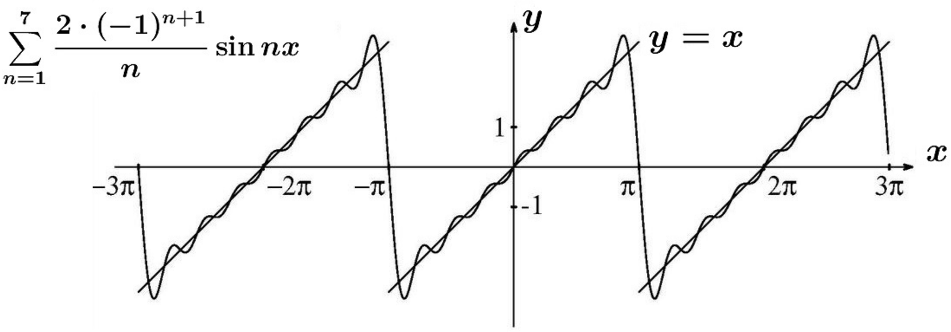
הנקודה x_m, כאשר $m \to \infty$, שואפת מצד שמאל לנקודה $x = \pi$, ולכן $\phi(x_m) \approx \pi$. גודל הקפיצה בנקודה $x = \pi$ הוא $\phi(\pi-) - \phi(\pi+) = 2\pi$, ולכן עבור m מספיק גדול

$$.\frac{T_m(x_m) - \phi(x_m)}{\phi(\pi-) - \phi(\pi+)} \approx \frac{1.18\pi - \pi}{2\pi} \approx 0.09$$



איור 2.4: תופעת גיבס

בציורים 2.4, 2.5, אפשר לראות את היחס שבין הגרפים של T_{10} ו־T_7 ובין הגרף של ϕ. יש לשים לב למה שקורה בסביבת הנקודות $x = \pm\pi$ (ו־$x = \pm 3\pi$). שם הגרפים של T_7



איור 2.5: תופעת גיבס

ו־T_{10} רחוקים באופן יחסי מן הגרף של ϕ.

על סמך הדוגמא האחרונה, נביא עכשיו הוכחה כללית לקיום תופעת גיבס עבור כל פונקציה המקיימת את תנאי משפט דיריכלה.

טענה 2.23: תהי f פונקציה כך ש־$f, f' \in E$. תהי d נקודת קפיצה של f, $-\pi \le d < \pi$, ויהי

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הסכום החלקי של הטור פוריה של f. אזי קיימת סדרת נקודות $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $x_m > d$, כך ש־

$$\lim_{m \to \infty} \frac{S_m(x_m) - f(x_m)}{f(d+) - f(d-)} = 0.089 \,.$$

הוכחה: נניח כי $-\pi < d < \pi$, ונסמן

$$z = f(d+) - f(d-) \,.$$

תהי ϕ הפונקציה שבדוגמא 11 ויהיו $T_m(x)$ הסכומים החלקיים של הטור פוריה של ϕ, כפי שהגדרנו באותה דוגמא. נגדיר את הפונקציה

$$g(x) = f(x) + \frac{z}{2\pi}\phi(x + \pi - d) \,.$$

לא קשה לראות כי $g(d-) = g(d+)$ (ראה גם את הוכחת משפט 2.17) ו־$g, g' \in E$. לכן נוכל להניח כי g רציפה בנקודה $x = d$, ולכן קיים $\delta > 0$ מספיק קטן כך ש־g רציפה בכל הקטע $[d - \delta, d + \delta]$. על פי משפט 2.17, הטור פוריה של g מתכנס במידה שווה ל־g בקטע $[d - \delta, d + \delta]$. נסמן ב־U_m את הסכומים החלקיים של הטור פוריה של g. מן ההגדרות נובע

$$f(x) = g(x) - \frac{z}{2\pi}\phi(x + \pi - d)$$

ומזה נובע כי לכל x בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$.S_m(x) = U_m(x) - \frac{z}{2\pi} T_m(x+\pi-d)$$

יהי $\varepsilon > 0$. מן ההתכנסות במידה שווה של T_m ל־g בקטע $[d-\delta, d+\delta]$ נובע שקיים m_1 כך שלכל $m \geq m_1$ ולכל x בקטע $[d-\delta, d+\delta]$ מתקיים

$$.\,|g(x) - U_m(x)| < \varepsilon|z| \tag{2.10}$$

על סמך דוגמא 11, קיים טבעי $m_0 \geq m_1$ כך שלכל $m \geq m_0$ קיימת נקודה x_m בתוך הקטע $[d, d+\delta]$ כך ש־

$$.\frac{\phi(x_m+\pi-d) - T_m(x_m+\pi-d)}{2\pi} = 0.089 \tag{2.11}$$

(0.089 הוא ערך שקטן במעט מן הערך האמיתי שנובע מן החישובים בדוגמא 11.) לכן, לכל $m \geq m_0$, נובע מ־(2.10) ו־(2.11) ש־

$$\left| \frac{S_m(x_m) - f(x_m)}{f(d+) - f(d-)} - 0.089 \right| < \varepsilon$$

ומכאן הטענה. ■

הערה: הוכחנו קיום של נקודות x_m בקטע $[d, d+\delta]$ המקיימים

$$.\frac{S_m(x_m) - f(x_m)}{f(d+) - f(d-)} \approx 0.089$$

כמובן שבאותו אופן נוכל להוכיח קיום של נקודות $\tilde{x}_m$ בקטע $[d-\delta, d]$ אשר עבורם

$$.\frac{S_m(\tilde{x}_m) - f(\tilde{x}_m)}{f(d+) - f(d-)} \approx -0.089$$

לא הוכחנו שהפער בין S_m ו־f בסביבת הנקודה d לא עשוי להיות יותר גדול, אך זוהי עובדה. התופעה שמתרחשת עבור כל נקודות אי-הרציפות של כל פונקציה f (המקיימת $f, f' \in E$) היא בדיוק זו שמתרחשת בנקודות $x = \pm\pi$ במקרה של הפונקציה $\phi(x) = x$.

2.8 טור סינוסים וטור קוסינוסים

תהי f פונקציה המקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[0,\pi]$. קיימים אינסוף טורי פוריה שונים המתכנסים ל־f נקודתית. הסיבה לכך היא שניתן להרחיב את f לקטע $[-\pi,\pi]$ באינסוף דרכים שונות (למשל נוכל לקבוע ש־$f(x)=0$ לכל $-\pi \le x < 0$) כך שההרחבה תמשיך לקיים את התנאים של משפט דיריכלה. לכל אחת מן ההרחבות הללו מתאים טור פוריה אחד אשר בקטע $[0,\pi]$ יתכנס ל־f נקודתית (במובן של משפט דיריכלה). מבין כל הדרכים הרבות להרחיב את f לקטע $[-\pi,\pi]$ קיימות מספר הרחבות המביאות אותנו לטורי פוריה פשוטים יחסית. על שתיים מן ההרחבות האלה נדון בסעיף זה.

בסעיף 2.2 ראינו שאם g היא פונקציה זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ אזי הטור פוריה של g הוא טור קוסינוסים (מאחר וכל המקדמים $b_n=0$). כמו־כן, אם g אי-זוגית אז הטור פוריה של g הוא טור סינוסים. טורים כאלה הם יותר קצרים ונוחים מטורי פוריה כלליים. עובדה זו מובילה אותנו להגדיר שני טורים שונים המאפיינים את f בקטע $[0,\pi]$.

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,\pi]$. נגדיר את הפונקציה $\hat{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}.$$

אזי $\hat{f}$ היא פונקציה זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ והיא נקראת **ההמשכה הזוגית של** f. על פי טענה 2.4, הטור פוריה של $\hat{f}$ הוא

$$\hat{f}(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

כמו־כן, נגדיר את הפונקציה $\tilde{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} -f(-x), & -\pi\le x<0 \\ 0, & x=0 \\ f(x), & 0<x\le \pi \end{cases}.$$

$\tilde{f}$ היא פונקציה אי-זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ והיא נקראת **ההמשכה האי-זוגית של** f. שוב,

על פי טענה 2.4, הטור פוריה של $\tilde{f}$ הוא

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

הגדרה 2.24: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$. הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

נקרא **טור הקוסינוסים** של f. כמו־כן, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

נקרא **טור הסינוסים** של f.

לדיון הזה קיימות כמה מסקנות תאורטיות. יהי $E[0,\pi]$ המרחב הליניארי של כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[0,\pi]$ המקבלות ערכים ב־$\mathbb{C}$. על $E[0,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

לא קשה להוכיח כי כל אחת מן הסדרות $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ ו־ $\{\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית בפני עצמה במרחב $E[0,\pi]$. מן הדיון הנ"ל יוצא גם שכל אחת מן המערכות האלה היא סגורה. תכונה זו שקולה לקיום שוויון פרסבל עבור כל $f \in E[0,\pi]$ (על סמך טענה 1.24). לא קשה לראות שעבור המערכת של הקוסינוסים, שוויון פרסבל הוא

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

כאשר $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$. עבור המערכת של הסינוסים, שוויון פרסבל הוא

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$$

כאשר $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$. מסקנה מידית נוספת היא המסקנה הבאה הנובעת מיד ממשפט 2.15:

טענה 2.25:

א. אם f רציפה בקטע $[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$, ואם $f' \in E[0,\pi]$, אזי טור הסינוסים של f מתכנס במידה שווה ל־f על כל הקטע.

ב. אם f רציפה בקטע $[0,\pi]$, ואם $f' \in E[0,\pi]$, אזי טור הקוסינוסים של f מתכנס במידה שווה ל־f על כל הקטע.

בסעיף א', התנאי $f(0)=f(\pi)=0$ הוא תנאי הכרחי להתכנסות במידה שווה (כל טור סינוסים מתאפס בנקודות $x=0$ ו־$x=\pi$). בסעיף ב' לעומת זאת אין שום תנאי על f בקצות הקטע.

תרגילים

1. תהי $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$, ותהי $\tilde{f}$ ההרחבה האי-זוגית של f לקטע $[-\pi,\pi]$. מצא את הטור פוריה של $\tilde{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2. תהי $f \in E$ ויהי

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

טור הסינוסים של f, ו־

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

טור הקוסינוסים של f. למה שווה הפונקציה

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

בכל נקודה x בקטע $[-\pi,\pi]$?

3. **א.** פתח את טור הסינוסים של הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

ב. הוכח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

ג. הוכח גם כי

$$\frac{\pi^3}{32}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots.$$

4. **א.** פתח את טור הסינוסים $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ של $\cos x$ בקטע $[0,\pi]$.

א. האם הטור מתכנס בכל נקודה של הקטע $[-\pi,\pi]$?

ב. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

שרטט את הגרף של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

2.9 גזירה ואינטגרציה של טור פוריה

אחת מן הבעיות היסודיות של האנליזה המתמטית היא הטיפול במושג האינסוף על כל צורותיו השונות. דוגמאות לכך אפשר למצוא כמעט בכל סעיף וסעיף של ספר זה. אחת מן הבעיות הקשורות באופן עקיף לבעיה זו היא בעיית האפשרות להחליף סדר פעולות (כמו אינטגרציה, גזירה, או סכום אינסופי). דוגמא קלאסית לטיפול בבעיה מסוג זה תוצג בסעיף הזה. תהי f פונקציה המקיימת $f,f'\in E$ אשר טור פוריה שלה הוא

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx].$$

האם נכון לאמר כי

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}[-na_n\sin nx+nb_n\cos nx]\ ?$$

במילים אחרות, השאלה היא: האם ניתן לגזור את הטור פוריה של f איבר איבר ולקבל על ידי כך את הטור פוריה של f'? באופן כללי, התשובה לשאלה זו היא שלילית. נביא דוגמא פשוטה לכך. בדוגמא 1 ראינו כי הטור פוריה של $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

אם נגזור את הטור איבר איבר נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n+1}\cos nx$. טור זה אינו

הטור פוריה של $f'(x)=1$, משום שהטור פוריה של $f'(x)=1$ הוא פשוט הטור פוריה המורכב מן האיבר היחיד 1! (סיבות נוספות הם שטור זה אינו מתכנס עבור $x=0$, וסדרת מקדמיו אינה שואפת לאפס בניגוד ללמה של רימן-לבג.)

בהוכחת משפט 2.15 (ראה את ההוכחה שם) הראינו שהתשובה לשאלה הנ"ל היא חיובית אם בנוסף f רציפה על כל הקטע ומקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$. ננסח תוצאה זו במשפט הבא.

משפט 2.26: אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'\in E$, ואם

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

אזי ניתן לגזור את הטור פוריה של f איבר איבר ולקבל

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}[-na_n\sin nx+nb_n\cos nx].$$

נעבור עכשיו לשאלה דומה בנוגע לאינטגרציה איבר איבר של הטור. כשגוזרים את הביטויים $\sin nx$ ו־$\cos nx$ מקבלים $n\cos nx$ ו־$-n\sin nx$. המקדם n שמופיע בשני הביטויים האחרונים מגדיל באופן ניכר את גודלם של איברי הטור החדש, ולכן עשוי לגרום לטור זה להתבדר. באינטגרציה איבר איבר, לעומת זאת, האינטגרל של הביטויים $\sin nx$ ו־$\cos nx$ הוא $-\frac{\cos nx}{n}$ ו־$\frac{\sin nx}{n}$, מה שמקטין עוד יותר את גודל איברי הטור החדש, ולכן ניתן לצפות שהטור החדש יתכנס, ואכן כך הוא הדבר. הבעייה היחידה שמתעוררת באינטגרציה של טור פוריה נוגעת לאיבר החופשי $\frac{a_0}{2}$, אשר האינטגרל שלו $\frac{a_0}{2}x$ אינו חוקי כאיבר בטור פוריה. לכן תוצאת אינטגרציה איבר איבר של טור פוריה לא תתן בדרך כלל טור פוריה.

משפט 2.27: תהי $f\in E$ עם טור פוריה

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx].$$

אזי לכל $x\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{x}f(t)dt=\frac{a_0(x+\pi)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}(\cos nx-\cos n\pi)\right]$$

והטור באגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה באגף שמאל.

הוכחה: נגדיר

$$g(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)dt-\frac{a_0}{2}x.$$

אזי g רציפה כי $f \in E$, ובנוסף לכך מתקיים

$$g'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \tag{2.12}$$

בכל נקודה x בה f רציפה. לכן $g' \in E$. מהגדרת g ברור כי $g(-\pi) = \frac{a_0\pi}{2}$ ו־

$$.g(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{a_0\pi}{2} = a_0\pi - \frac{a_0\pi}{2} = \frac{a_0\pi}{2}$$

לכן $g(-\pi) = g(\pi)$. הפונקציה g מקיימת את תנאי משפט 2.15. לפי משפט זה, הטור פוריה של g מתכנס במידה שווה ל־g בקטע $[-\pi, \pi]$. בפרט מתקיים שוויון מדויק לכל $x \in [-\pi, \pi]$

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx] \tag{2.13}$$

כאשר בצד ימין רשום הטור פוריה של g. על פי משפט 2.26 (אשר g מקיימת את תנאיו),

$$.g'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [-nA_n \sin nx + nB_n \cos nx]$$

אבל משוויון (2.13) נובע כי

$$.g'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

לכן, לכל $n \geq 1$, מתקיימים השוויונים

$$.nB_n = a_n, \qquad -nA_n = b_n$$

נציב תוצאות אלה בנוסחה (2.13) ונקבל כי

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = g(x) + \frac{a_0}{2}x = \frac{a_0}{2}x + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right] \tag{2.14}$$

נותר לנו לחשב את המקדם A_0. לשם כך נציב $x = -\pi$ בנוסחה האחרונה ונקבל

$$.0 = -\frac{a_0}{2}\pi + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n} \cos n\pi$$

אם נחלץ את A_0, נקבל

$$.A_0 = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{n} \cos n\pi$$

נציב תוצאה זו בנוסחה (2.14) בכדי לקבלת את מסקנת המשפט. ∎

הערה: במשפט 2.27 ניתן להפוך את הטור שבצד ימין לטור פוריה על ידי הצבת הטור פוריה של x במקום המשתנה x שמופיע באיבר הראשון. אך על ידי פעולה זו נאבד את תכונת ההתכנסות במידה שווה של הטור הקודם, מאחר והטור פוריה של x אינו מתכנס ל־ x בנקודות $x = \pm\pi$.

תרגילים

1. תהי $f(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$ מתכנס לכל ערך של x.

ג. לכל x ממשי, נגדיר $g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$. שרטט במדויק את הגרף של g בקטע $[-2\pi, 2\pi]$.

ד. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

2. תהי $f \in E$ פונקציה זוגית כך ש־ $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 5$. נגדיר את הפונקציה

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt, \qquad -\pi \le x \le \pi .$$

יהי

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של F בקטע $[-\pi, \pi]$. נגדיר

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

חשב את $G(-\pi)$, $G(\pi)$, ואת $G(0)$.

3. תהי $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{4}-x, & 0<x<\pi\end{cases}$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. נגדיר $S(x)=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$. חשב את $S(x)$, לכל $-\pi<x<\pi$.

4. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π כך ש־

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0\,.$$

נגדיר $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכח ש־g מחזורית 2π.

ב. יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi,\pi]$ ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של g. הוכח שלכל x ממשי מתקיים השוויון

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$$

ושלכל n שלם מתקיים $d_n=\frac{c_n}{in}$.

5. הוכח כל אחת מהטענות הבאות

א. תהי $f\in E$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. יהי $-\pi\le c\le\pi$, הוכח כי לכל x בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים השוויון

$$\int_c^x f(t)\,dt=\frac{1}{2}a_0(x-c)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\sin nx-\sin nc)-\frac{b_n}{n}(\cos nx-\cos nc)\right]$$

ובנוסף לכך, הטור שבאגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה שבאגף שמאל.

ב. תהי $g \in E[0,\pi]$, ויהי

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

טור הקוסינוסים של g בקטע $[0,\pi]$. הוכח כי לכל x בקטע $[0,\pi]$,

$$\int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$$

ובנוסף לכך, הטור שבאגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה שבאגף שמאל.

ג. תהי $h \in E[0,\pi]$, ויהי

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

טור הסינוסים של h בקטע $[0,\pi]$. הוכח כי לכל x בקטע $[0,\pi]$,

$$\int_0^x h(t)\,dt = \beta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx$$

כאשר $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$, ובנוסף לכך, הטור שבאגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה שבאגף שמאל.

6. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, ו־$f' \in E$. יהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. הוכח כי

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} nb_n = 0\,.$$

האם נכון יהיה לאמר שגם $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$?

2.10 טורי פוריה בקטעים שונים

עד עתה עסקנו בטורי פוריה על הקטע $[-\pi,\pi]$. הסיבה לכך היתה שזהו קטע נוח מאוד בכדי לפתח את התאוריה הכללית של טורי פוריה בו. אך כמובן, התאוריה שפתחנו אינה מיוחדת לקטע זה בלבד, והיא חלה על כל קטע סופי $[a,b]$. בסעיף זה נגדיר מהו טור פוריה על קטע סגור כלשהו $[a,b]$ וננמק מדוע כל המשפטים שהוכחנו בפרק זה מתקיימים באופן דומה גם עבור קטע $[a,b]$.

לכל קטע סגור $[a,b]$ יהי $E[a,b]$ המרחב הליניארי של כל הפונקציות הרציפות למקוטעין $f:[a,b]\to\mathbb{C}$.

הגדרה 2.28: תהי $f\in E[a,b]$. הטור

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right]$$

כאשר

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \qquad n=1,2,\ldots$$

נקרא **הטור פוריה של f בקטע** $[a,b]$.

מן ההגדרה ברור שאם $[a,b]=[-\pi,\pi]$ אז נקבל את הטור פוריה הרגיל. נוכל להצדיק את ההגדרה הזו בדיוק באותו האופן שבו הצדקנו את ההגדרה המקורית של הטור פוריה. כלומר, נוכל להוכיח שסדרת הפונקציות

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\frac{2n\pi x}{b-a},\quad \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית במרחב $E[a,b]$ ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx .$$

אנו נצדיק את הגדרה 2.28 בדרך אחרת. מאחר וכבר טרחנו לפתח את התאוריה הכללית של טורי פוריה עבור הקטע $[-\pi,\pi]$, נוכל להשתמש בתוצאות שכבר קבלנו בכדי להקל על המלאכה. נתחיל קודם כל בקטעים מן הצורה $[-c,c]$, כאשר $c>0$. תהי $f\in E[-c,c]$. נגדיר פונקציה חדשה

$$g(t)=f(\tfrac{ct}{\pi}),\qquad -\pi\le t\le\pi .$$

כלומר, בצענו למעשה החלפת משתנה $x=\frac{ct}{\pi}$. ברור כי g רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ ולכן יש לה טור פוריה רגיל

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nt+b_n\sin nt\right]$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt, \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt, \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

נציב בחזרה את $t=\frac{\pi x}{c}$ ונקבל

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{c} + b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\right] \tag{2.15}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{c}\textstyle\int_{-c}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \tfrac{1}{c}\textstyle\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx, \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.16}$$

קבלנו לכן את הגדרה 2.28 עבור קטעים מן הצורה $[a,b]=[-c,c]$. בשלב הבא נעבור לטפל בקטע כלשהו $[a,b]$. תהי $f\in E[a,b]$. תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ההמשכה המחזורית $b-a$ של f לכל $\mathbb{R}$. כלומר g היא הפונקציה היחידה המוגדרת על כל $\mathbb{R}$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

א. $g(x)=f(x)$, לכל $a\le x<b$.

ב. $g(x+b-a)=g(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

ברור כי g תהיה רציפה למקוטעין בכל קטע סופי, ובפרט, יש לה טור פוריה בכל קטע מן הצורה $[-c,c]$. נקח $c=\frac{b-a}{2}$. אז על פי נוסחאות (2.15) ו־(2.16) נקבל כי

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right] \tag{2.17}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a}\int_{-c}^{c} g(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_{-c}^{c} g(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

הפונקציה g וגם הטור פוריה שלה מחזוריות $b-a$ על כל $\mathbb{R}$, ולכן הנוסחה (2.17) מתקיימת לא רק בקטע $[-c,c]$ אלא בכל $\mathbb{R}$. בפרט, נוסחה (2.17) נשארת נכונה בקטע $[a,b]$ (אשר בו $f(x)=g(x)$). בנוסף לכך הפונקציות $g(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}$ ו־ $g(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}$ הן מחזוריות $b-a$ על כל הישר, ולכן האינטגרלים שלהן בכל קטע באורך $b-a$ שווים (נזכיר לקורא שאם $h(x)$ היא פונקציה מחזורית L, אזי האינטגרל $\int_d^{d+L} h(x)dx$ הוא גודל קבוע אשר

אינו תלוי ב־d). לכן נוכל לרשום

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

ובכך סיימנו את הצדקת הגדרה 2.28.

דוגמה 12: אם f היא פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$ אזי הטור פוריה של f הוא

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2nx\,dx, \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

נדגיש כי אין שום קשר בין טור זה לבין טור הסינוסים או טור הקוסינוסים של f בקטע $[0,\pi]$!

לבסוף, הטור פוריה המרוכב של פונקציה רציפה למקוטעין $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ הוא

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{2in\pi x}{b-a}}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{-\frac{2\pi inx}{b-a}}\,dx, \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

תרגילים

1. תהי $f(x)=x^2$. יהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos nx+B_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[0, 2\pi]$. נגדיר את הפונקציה

$$h(x) = \frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - A_n)\cos nx + (b_n - B_n)\sin nx$$

לכל $-\pi \le x \le \pi$. חשב את h ושרטט במדויק את הגרף של h בקטע $[-\pi, 2\pi]$.

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית π. יהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[0, \pi]$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. בטא את A_n ואת B_n באמצעות a_n ו־b_n.

3. תהי $f(x) = \begin{cases} A\sin \omega_0 t, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$, כאשר $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. חשב את הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[0, T]$.

4. תהי $f \in E[a, b]$. רשום את שוויון פרסבל המתאים לפיתוח של f לטור פוריה בקטע $[a, b]$ והסבר מדוע הוא נכון.

5. תהי $f \in E[-\pi, \pi]$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f. נניח ש־f היא מחזורית $\frac{\pi}{m}$ עבור $m \in \mathbb{N}$ נתון. הוכח כי $a_n = b_n = 0$ לכל n שאינו מתחלק ב־$2m$.

2.11 שימושים למשוואות דיפרנציאליות חלקיות

סעיף זה מיועד בעקר לקורא בעל ידע מוקדם בנושא המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות או שלומד אותו במקביל. מלכתחילה, פותחה התאוריה של טורי פוריה (ע"י פוריה עצמו) על מנת לסייע בפתרון מספר בעיות מרכזיות בתחום המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות. בסעיף זה נציג את אחת השיטות הפשוטות לפתרון משוואות דיפרנציאליות

חלקיות ליניאריות על ידי שימוש בטורי פוריה: **שיטת הפרדת המשתנים** (או שיטת פוריה, כפי שהיא נקראת לפעמים). נדגים שיטה זו למקרה של משוואת החום ההומוגנית על מוט סופי שאורכו $2L$, עם תנאי שפה מחזוריים. עלינו למצוא פתרון פרטי $u = u(x,t)$ לבעייה הבאה

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & (-L < x < L, \quad 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = f(x) & (-L \le x \le L) \\ u(-L,t) = u(L,t) & (0 \le t < \infty) \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & (0 \le t < \infty) \end{cases} \tag{2.18}$$

כאשר $k > 0$ הוא קבוע פיזיקאלי.

מקובל גם לפרש את המערכת הזו כניסוח מתמטי לבעיית הולכת החום עבור הטמפרטורה $u(x,t)$ בטבעת מעגלית דקה באורך $2L$, כאשר בהתחלה $(t = 0)$ התפלגות הטמפרטורות על הטבעת נתונה לנו על ידי הפונקציה f. את נקודות המעגל אנו מייצגים על ידי נקודות הקטע $[-L, L]$, כאשר שתי הנקודות $x = L$ ו־$x = -L$ מייצגות נקודה אחת במעגל. זוהי הסיבה היחידה לכך שבניסוח המתמטי של הבעייה כללנו גם את תנאי הקצה $u(-L,t) = u(L,t)$ ו־$u_x(-L,t) = u_x(L,t)$. בכדי לקבל פתרון "טוב" לבעייה, על f להיות פונקציה רציפה, $f' \in E$, ולקיים $f(-L) = f(L) = 0$, ו־$f'(0) = f'(L)$.

רעיון השיטה הוא למצוא את כל הפתרונות הלא־טריביאליים מהצורה

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

למערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & -L < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ u(-L,t) = u(L,t) & 0 \le t < \infty \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & 0 \le t < \infty \end{cases} \tag{2.19}$$

מאוחר יותר נחפש פתרון פרטי המקיים גם את התנאי $u(x,0) = f(x)$ בתוך מרחב הפתרונות של בעייה (2.19). במקרה זה ברור כי

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t), \qquad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

ולכן לאחר הצבה במשוואה נקבל

$$X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0$$

ולכן

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t).$$

לאחר חילוק שני האגפים ב־$kX(x)T(t)$ (בהנחה שזה שונה מאפס) נקבל ש־

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

הביטוי שבאגף שמאל הוא פונקציה של t בלבד, ואילו הביטוי שבאגף ימין הוא פונקציה של x בלבד. מאחר והמשתנים t ו־x הם בלתי תלויים אחד בשני, הרי שהאפשרות היחידה ששני ביטויים אלה יהיו שווים אחד לשני היא שהם שניהם שווים לקבוע אשר נקרא לו $-\lambda$ (מסיבות של נוחיות). לכן נוכל לרשום

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

ומכך נקבל מייד זוג משוואות דיפרנציאליות רגילות

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T'(t) + k\lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

בנוסף לכך, יש בידנו שני תנאי שפה אשר מתוכם נוכל לגזור שני תנאים מצורפים עבור המשוואה הראשונה. מתנאי השפה $u(-L,t) = u(L,t)$ נובע כי לכל $t \geq 0$,

$$X(-L)T(t) = X(L)T(t).$$

קיימות שתי אפשרויות: או ש־$T(t) = 0$ לכל $t \geq 0$, או ש־$X(-L) = X(L)$. האפשרות הראשונה נפסלת מן הסיבה שהיא מובילה אותנו לפתרון הטריביאלי $u(x,t) \equiv 0$, אשר בו איננו מעוניינים. לכן נותרה לנו האפשרות $X(-L) = X(L)$ בלבד. באותו אופן נקבל כי $X'(-L) = X'(L)$. לסיכום קיבלנו את הבעייה הבאה עבור X:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < L) \\ X(-L) = X(L) \\ X'(-L) = X'(L) \end{cases} \tag{2.20}$$

בשלב זה, עלינו למצוא מהם הערכים האפשריים של λ אשר עבורם יש פתרון לא טריביאלי

לבעייה. ניתן לבדוק שהערכים היחידים של λ אשר עבורם יש פתרון לא טריביאלי הם

$$.\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

עבור $\lambda_0 = 0$ המשוואה היא $X''(x) = 0$ ופתרונה הכללי הוא

$$.X(x) = c_1 x + c_2$$

התנאי $X(-L) = X(L)$ גורר ש־$c_1 = 0$, והתנאי $X'(-L) = X'(L)$ אינו מטיל שום מגבלה על c_2. לכן, במקרה הזה, כל פונקציה קבועה $X(x) = C$ היא פתרון של (2.20).

עבור $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ המשוואה היא

$$X''(x) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} X(x) = 0$$

ופתרונה הכללי הוא

$$.X(x) = c_1 \sin\frac{n\pi}{L}x + c_2 \cos\frac{n\pi}{L}x$$

תנאי הקצה $X(-L) = X(L)$ ו־$X'(-L) = X'(L)$ מתקיימים על ידי כל אחד מן הפתרונות האלה ולכן אינם מטילים שום מגבלות על הקבועים c_1 ו־c_2.

לסיכום נוכל לומר שלכל n טבעי, לערך $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ מתאימים שני פתרונות לא טריביאליים בסיסיים

$$.X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}x, \qquad X_n^*(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}x$$

כל הפתרונות האחרים הם כמובן צירופים ליניאריים של שני פתרונות אלה. הערכים λ_n נקראים **הערכים העצמיים** של הבעייה, והפתרונות X_n ו־X_n^* נקראים **הפונקציות העצמיות** של הבעייה השייכות לערך העצמי λ_n. נזכור רק שבקבוצת הערכים העצמיים עלינו לכלול גם את הערך העצמי $\lambda_0 = 0$, שהפונקציה העצמית השייכת לו היא

$$.X_0(x) = 1$$

נעבור עתה למשוואה השנייה $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$. כמובן λ מוגבל עכשיו רק לערכים העצמיים $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. לכל n כזה מתאים פתרון לא טריביאלי

$$.T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$$

פתרונות האחרים הם כפולות שלו בקבוע. לסיכום, עבור כל n טבעי, יש בידנו זוג פתרונות

לא טריביאליים למערכת (2.19):

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}\cos\tfrac{n\pi x}{L} \\ u_n^*(x,t) &= X_n^*(x)T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}\sin\tfrac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

עבור $n=0$ יש לנו את הפתרון

$$u_0(x,t) = X_0(t)T_0(t) = 1.$$

מאחר והמערכת (2.19) הומוגנית הרי שכל "צירוף ליניארי אינסופי" של הפתרונות שקבלנו עשוי להיות פתרון (במידה והוא מתכנס), ולכן אנו מקבלים אינסוף פתרונות מן הצורה הכללית

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n t}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]. \tag{2.21}$$

ניתן להוכיח כי זוהי צורתו של הפתרון הכללי לבעייה (2.19). עכשיו נגש למציאת הפתרון הפרטי עבור בעייה (2.18). עלינו להתייחס לתנאי ההתחלה הלא־הומוגני $u(x,0)=f(x)$, $-L\le x\le L$. מתנאי זה עלינו לחשב את שתי סדרות המקדמים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. אם נציב $t=0$ בפתרון הכללי נקבל

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right].$$

כלומר, עלינו לחשב את הטור פוריה של f בקטע $[-L,L]$. על סמך בנוסחאות (2.16) של הסעיף הקודם

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

ובכך מצאנו את הפתרון הפרטי לבעייה (2.18). לא קשה להוכיח כי עם המקדמים האלו, הטור (2.21) (וגם נגזרותיו החלקיות מסדר כלשהו) מתכנס במידה שווה ובהחלט לכל ערך של x בקטע $[-L,L]$ וערך של t בקטע $[0,\infty)$. בנוסף לכך אפשר לבדוק כי טור זה מקיים את משוואת החום.

2.12 תרגילים לחזרה כללית

1. תהי $f(x) = x + \cos x$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{nx}{2} + b_n \sin \frac{nx}{2} \right]$$

הטור פוריה של f בקטע $[0, 4\pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. תהי $g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{5} B_n \sin \frac{nx}{2}$. עבור איזה ערכים של A_0 ו־B_n, $1 \le n \le 5$, המרחק בין f ו־g מינימלי?

2. תהי $f(x) = x^2$ עבור $\pi \le x \le 3\pi$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[\pi, 3\pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. תהי $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{2}$, $-\pi \le x \le \pi$. חשב את g ושרטט את הגרף של g בקטע $[-\pi, \pi]$.

ג. תהי $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2}$, $-\pi \le x \le \pi$. חשב את h ושרטט את הגרף של h בקטע $[-\pi, \pi]$.

3. תהי $f(x) = |\sin x|$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. תהי $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [-na_n \sin nx + nb_n \cos nx]$. שרטט במדויק את הגרף של g בקטע $[-\pi, \pi]$.

ג. חשב את הסכומים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$$

4. מצא את הטור פוריה המרוכב של $f(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-it}}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π, ויהי

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi,\pi]$. נגדיר את הפונקציה

$$g(x)=\frac{f(x)+f(x+\pi)}{2}$$

ויהי

$$g(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$$

הטור פוריה המרוכב של g בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. בטא את המקדמים d_n באמצעות המקדמים c_n.

ב. אם $f(x)=x$, לכל $-\pi<x<\pi$, למה שווה הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}|c_{2n}|^2$?

6. לגבי הפונקציה f ידוע שלכל x ממשי $f(x+\pi)=f(x)$, לכל $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\sin 2x$, ולכל $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$, $f(x)=0$.

א. הוכח שלכל x ממשי

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{(2n-1)(2n+1)}$$

הסק מכך ש־

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

ב. חשב למה שווה הסכום

$$\frac{\sin 4x}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\sin 8x}{3\cdot4\cdot5}+\frac{\sin 12x}{5\cdot6\cdot7}+\cdots,\qquad 0\le x\le\pi$$

7. תהי $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ e^x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, ויהי

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. חשב את $F(0)$, $F(\frac{\pi}{2})$, ו־ $F(\pi)$.

ג. שרטט סקיצה של הגרף של F בקטע $[-2\pi, 2\pi]$.

ד. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

8. תהי $f(x) = e^{x(1+2\pi i)}$.

א. חשב את הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-1, 1]$.

ב. חשב את הטור פוריה הממשי של f בקטע $[-1, 1]$.

ג. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\pi^2}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}$.

9. **א.** פתח את הטור פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. על סמך הטור פוריה שקבלת, הוכח כי

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots.$$

ג. הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

10. בקטע $[-\pi, \pi]$ נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. מצא את הטור פוריה של f' בקטע $[-\pi, \pi]$.

ג. למה מתכנס הטור פוריה של f' בנקודות $x = \pm\frac{\pi}{2}$?

ד. חשב את הסכומים הבאים

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(-1)^k}{(2k-3)(2k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-3)^2(2k+1)^2},$$

11. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π, ויהי

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. תהי

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} [f(t) + f(\pi - t)]\, dt$$

ויהי

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של g בקטע $[-\pi, \pi]$. בטא את A_n ו־B_n על ידי a_n ו־b_n.

12. יהי $C[-\pi, \pi]^n$ מרחב כל הפונקציות הרציפות המוגדרות על $[-\pi, \pi]^n$ המקבלות ערכים ב־$\mathbb{C}$. במרחב זה נגדיר את המכפלה הפנימית

$$. \langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{פעמים } n} f(x_1, \ldots, x_n) \overline{g(x_1, \ldots, x_n)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

הוכח כי משפחת הפונקציות

$$\left\{ e^{i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)} \right\}_{n=1}^{\infty} m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו. אם נגדיר

$$c_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{פעמים } n} f(x_1, \ldots, x_n) e^{-i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)} dx_1 \cdots dx_n$$

אזי הטור

$$\sum_{m_1, \ldots, m_n = -\infty}^{\infty} c_{m_1, \ldots, m_n} e^{i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)}$$

נקרא **הטור פוריה המרוכב הרב־מימדי** של f. הוכח שאם f_1, f_2, ... , f_n הן פונקציות השייכות ל־$C[-\pi, \pi]$, ואם

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

אזי

$$c_{m_1,\dots,m_n} = a^1_{m_1} a^2_{m_2} \cdots a^n_{m_n}$$

כאשר a^k_m הם מקדמי הטור פוריה המרוכב של f_k. כלומר $f_k(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^k_m e^{imx}$.

פרק 3

התמרת פוריה

בפרק זה נלמד על התמרת פוריה. בחמשת הסעיפים הראשונים של הפרק נלמד את התאוריה של התמרת פוריה. רצוי במיוחד לשים לב לנושאים של ההתמרת ההפוכה, נוסחת פלנשראל, והקונבולוציה. בסעיף 3.6 נציג שימושים של התמרת פוריה לפתרון משוואות דיפרנציאליות חלקיות. בסעיף 3.7 נשתמש בהתמרת פוריה (וגם בטורי פוריה) בכדי לפתור כמה בעיות בתורת האינפורמציה ועבוד אותות. התמרת פוריה היא אחת משתי ההתמרות האינטגרליות שעליהן נלמד בספר זה. פוריה עצמו הגדיר והשתמש לראשונה בהתמרה זו, אשר בצדק קרויה על שמו.

3.1 הגדרה ותכונות יסודיות

תהי f פונקציה המוגדרת על כל $\mathbb{R}$ עם ערכים ב־$\mathbb{C}$. נגדיר באופן פורמלי פונקציה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ על ידי

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

הגדרה זו היא פורמלית במובן שהאינטגרל שבאגף ימין אינו תמיד קיים. אם הוא קיים, אז הפונקציה F (או $\mathcal{F}[f]$) נקראת **ההתמרת פוריה (Fourier transform)** של f. בספרים רבים משתמשים בסימון $\hat{f}(\omega)$ עבור ההתמרת פוריה של f.

קיים קשר בין הטור פוריה ובין ההתמרת פוריה שלא נכנס אליו כאן. נציין רק שהטור פוריה מיועד עבור פונקציות המוגדרות על קטע סופי (או פונקציות מחזוריות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$) אך ההתמרת פוריה נועדה לטפל בפונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ (אשר אינן מחזוריות). נסמן על ידי $G(\mathbb{R})$ את קבוצת כל הפונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ עם ערכים ב־$\mathbb{C}$ שהן רציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט. נציין כי

א. f **רציפה למקוטעין** על כל $\mathbb{R}$ אם היא רציפה למקוטעין על כל קטע סופי $[a,b]$. נובע מכך שיתכן שיש ל־f מספר בן־מנייה של נקודות אי־רציפות (אך רק מספר סופי של

נקודות כאלה בכל קטע סופי). דוגמא פשוטה למצב כזה היא פונקצית הערך השלם $f(x) = [x]$ אשר כל מספר שלם $x = n$ הוא נקודת אי-רציפות שלה.

ב. f **אינטגרבילית בהחלט** מעל $\mathbb{R}$ אם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. כלומר האינטגרל מעל כל $\mathbb{R}$ של $|f|$ קיים וסופי.

לא קשה לבדוק כי $G(\mathbb{R})$ הוא מרחב ליניארי מעל $\mathbb{C}$. מן ההגדרה ברור כי לכל $f \in G(\mathbb{R})$ ההתמרת פוריה של f קיימת ומוגדרת לכל $\omega \in \mathbb{R}$. בנוסף לכך קיימות עוד כמה תכונות שיש לפונקציות אלה.

משפט 3.1: לכל $f \in G(\mathbb{R})$,

1. $F(\omega)$ מוגדר לכל $\omega \in \mathbb{R}$;
2. F היא פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$.

בכדי להוכיח משפט זה נשתמש במשפט עזר ידוע מאוד בתחום האנליזה הקלאסית. אשר שמו באנגלית הוא Lebesgue Dominated Convergence Theorem.

משפט 3.2: **(משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג)** תהי $\{f_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ משפחת פונקציות רציפות למקוטעין ב־$\mathbb{R}$ ונניח כי:

1. קיימת פונקציה g כך ש־$|f_h(x)| \le g(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $h \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx < \infty$;
3. $\lim_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

אזי

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

כפי שכבר אמרנו, אחת מן הבעיות המרכזיות בתחום האנליזה הקלאסית היא בעיית הטיפול במושג האינסוף, או האפשרות לשנות סדר של פעולות. משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג הוא אחד מן המשפטים שמציג תנאים אשר תחתיהם ניתן לשנות את סדר הפעולות $\int_{-\infty}^{\infty}$ ו־ $\lim\limits_{n\to\infty}$. באופן כללי לא ניתן לעשות זאת. לדוגמא נתבונן בסדרת הפונקציות:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \le x \le n+1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

ותהי $f \equiv 0$ (כלומר $f(x) = 0$ לכל x). ברור שלכל x ממשי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ושלכל n, $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$. לכן

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

העובדה שמדובר כאן באינטגרל לא אמיתי מעל כל $\mathbb{R}$ אינה מקור לבעייה. תופעות דומות קורות גם כאשר מדובר באינטגרל הרגיל של רימן מעל קטע סופי. הקיום של פונקציה g, המקיימת את התנאים **1** ו־**2** במשפט 3.2, מאפשר לנו לשנות את סדר הפעולות. הוכחת משפט זה חורגת ממסגרתו של ספר זה.

הוכחת משפט 3.1:

1. מן העובדה ש־$\left|e^{-i\omega x}\right| = 1$, לכל x ו־ω ממשיים, נובע כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)e^{-i\omega x}\right| dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty\,.$$

לכן הפונקציה $f(x)e^{-i\omega x}$ אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, לכל ערך ממשי ω. כמו־כן, ברור ש־$f(x)e^{-i\omega x}$ רציפה למקוטעין מעל $\mathbb{R}$, ולכן פונקציה זו שייכת ל־$G(\mathbb{R})$. לכן הפונקציה $F(\omega)$ מוגדרת לכל ערך ממשי של ω.

2. יהי $\omega \in \mathbb{R}$. נוכיח כי F רציפה בנקודה ω. בכדי להוכיח טענה זו נוכיח ש־

$$\lim_{h\to 0}[F(\omega+h) - F(\omega)] = 0\,.$$

נשתמש בהגדרה של F:

$$\begin{aligned} F(\omega+h) - F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+h)x}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\left[e^{-ihx} - 1\right] dx \end{aligned}$$

לכל מספר ממשי h נגדיר את הפונקציה

$$f_h(x) = f(x)e^{-i\omega x}\left[e^{-ihx} - 1\right].$$

עכשיו, לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f_h(x) &= \lim_{h\to 0} f(x)e^{-i\omega x}\left[e^{-ihx}-1\right]\\ &= f(x)e^{-i\omega x}\lim_{h\to 0}\left[e^{-ihx}-1\right]\\ &= f(x)e^{-i\omega x}\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

בנוסף לכך

$$|f_h(x)| = |f(x)|\cdot|e^{-i\omega x}|\cdot|e^{-ihx}-1| \le |f(x)|\cdot 1\cdot 2 = 2|f(x)|.$$

הפונקציה $g(x) = 2|f(x)|$ מקיימת את התנאים 1 ו־2 של משפט 3.2. לכן ממשפט זה נקבל

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\,dx = 0.$$

כלומר $\lim_{h\to 0}[F(\omega+h)-F(\omega)] = 0$, ולכן F רציפה בכל נקודה $\omega \in \mathbb{R}$.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) &= \lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \lim_{\omega\to\pm\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx\right]\end{aligned}$$

בכדי להוכיח כי $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$ יספיק להוכיח ש־

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx &= 0\\ \lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx &= 0\end{aligned}$$

נסתפק בהוכחת השוויון הראשון מאחר והוכחת השוויון השני דומה.

נתון לנו כי f אינטגרבילית בהחלט מעל כל $\mathbb{R}$. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך ש־

$$\int_{|x|>M} |f(x)|\,dx < \varepsilon$$

ומזה יוצא

$$\left|\int_{|x|>M} f(x)\cos\omega x\,dx\right| \le \int_{|x|>M} |f(x)\cos\omega x|\,dx \le \int_{|x|>M} |f(x)|\,dx < \varepsilon\,.$$

לכן אם נוכיח כי

$$\lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-M}^{M} f(x)\cos\omega x\,dx = 0$$

עבור M סופי כלשהו אז נקבל את התוצאה הרצויה. נציין שאילו ω היה מקבל רק ערכים שלמים אזי עובדה זו נובעת מייד מן הלמה של רימן-לבג (טענה 2.11). אבל ω מקבל כל ערך ממשי ולכן נצטרך להוכיח זאת. הפונקציה f רציפה למקוטעין בקטע $[-M,M]$ ולכן, עבור כל $\varepsilon > 0$, קיימת חלוקה של הקטע $[-M,M]$

$$-M = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = M$$

כך שעבור פונקצית המדרגות

$$h(x) = f(x_k), \qquad x_{k-1} < x \le x_k, \quad k = 1,2,\ldots,m$$

מתקיים

$$\int_{-M}^{M} |f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon\,.$$

כלומר, ניתן להתקרב ל־f במובן הנ"ל על ידי פונקצית המדרגות h. עובדה זו נובעת מהגדרת האינטגרל של רימן. עתה

$$\int_{-M}^{M} f(x)\cos\omega x\,dx = \int_{-M}^{M} [f(x)-h(x)]\cos\omega x\,dx + \int_{-M}^{M} h(x)\cos\omega x\,dx\,.$$

נוכיח שכל אחד מן האינטגרלים שבאגף ימין שואף לאפס כאשר ω שואף לאינסוף. לכל $\omega\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-M}^{M} [f(x)-h(x)]\cos\omega x\,dx\right| &\le \int_{-M}^{M} |f(x)-h(x)|\cdot|\cos\omega x|\,dx\\ &\le \int_{-M}^{M} |f(x)-h(x)|\,dx < \varepsilon\end{aligned}$$

לגבי האינטגרל השני:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-M}^{M} h(x)\cos\omega x\,dx\right| &= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\cos\omega x\,dx\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\frac{\sin\omega x_k - \sin\omega x_{k-1}}{\omega}\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{m}|f(x_k)|\frac{2}{\omega} \\ &\le \frac{2m}{\omega}\max_{-M\le x\le M}|f(x)|\end{aligned}$$

לכן עבור כל ω מספיק גדול יתקיים

$$\frac{2m}{\omega}\max_{-M\le x\le M}|f(x)| < \varepsilon$$

ולכן

$$\left|\int_{-M}^{M} f(x)\cos\omega x\,dx\right| < 2\varepsilon$$

ובכך סיימנו. ∎

3.2 דוגמאות

דוגמה 1: תהי $f(x) = e^{-|x|}$. לא קשה לבדוק ש־f אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$. נחשב את ההתמרת פוריה של f:

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-x-i\omega x}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x-i\omega x}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} e^{x(-1-i\omega)}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{L\to\infty}\left.\frac{e^{x(-1-i\omega)}}{-1-i\omega}\right|_0^L + \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right|_{-M}^0\right]\end{aligned}$$

מן העובדה ש־$\lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$ נקבל ש־

$$\lim_{L\to\infty} \frac{e^{L(-1-i\omega)}}{-1-i\omega} = \lim_{L\to\infty} \frac{e^{-L}e^{-i\omega L}}{-1-i\omega} = 0$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{e^{-M(1-i\omega)}}{1-i\omega} = \lim_{M\to\infty} \frac{e^{-M}e^{iM\omega}}{1-i\omega} = 0\,.$$

לכן

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-i\omega+1+i\omega}{1+\omega^2}\right] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\,.$$

קבלנו שההתמרת פוריה של $e^{-|x|}$ היא $\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

דוגמה 2: נחשב את ההתמרת פוריה של

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \le x \le b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר $-\infty < a < b < \infty$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_a^b = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega} \end{aligned}$$

במקרה המיוחד $a = -b$, $b > 0$, נקבל ש־

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega} = \frac{\sin\omega b}{\omega\pi}\,.$$

לפעמים מסמנים $\mathrm{sinc}(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}$, ולכן ניתן גם לרשום

$$F(\omega) = \frac{b}{\pi}\mathrm{sinc}(b\omega)\,.$$

דוגמה 3: נחשב עכשיו את ההתמרת פוריה של $f(x) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$. נעשה זאת בדרך עקיפה. לפי ההגדרה

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx$$

ולכן

$$.F'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx$$

ניתן להוכיח כי אפשר להחליף את סדר האינטגרציה והגזירה ביחס ל־ω (מדוע?) ולכן

$$.F'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-ix)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-2xe^{-x^2})e^{-i\omega x}\,dx$$

על ידי אינטגרציה לפי חלקים נקבל

$$.F'(\omega) = \frac{i}{4\pi}\left[e^{-x^2}e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-i\omega e^{-i\omega x})\,dx\right]$$

נחשב את הביטוי הראשון שבאגף ימין:

$$e^{-x^2}e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{L,M\to\infty}\left[e^{-L^2}e^{-i\omega L} - e^{-M^2}e^{i\omega M}\right] = 0$$

ולכן

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-i\omega)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= -\frac{\omega}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx \\ &= -\frac{\omega}{2}F(\omega) \end{aligned}$$

לא חישבנו את F, אך הראינו כי פונקציה זו מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה מסדר ראשון

$$.F'(\omega) + \frac{\omega}{2}F(\omega) = 0$$

על ידי אחת מן השיטות המתאימות לפתרון משוואות דיפרנציאליות מסוג זה נמצא כי הפתרון הכללי של משוואה זו הוא

$$F(\omega) = Ae^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

כאשר A הוא קבוע שרירותי. בכדי לסיים את החישוב, עלינו לקבוע את A. לשם כך דרוש לנו תנאי התחלה כלשהו עבור F. נציב $\omega = 0$ בהגדרה של F ונקבל

$$.A = F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{0}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

ידוע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(ראה תרגיל 2), ולכן

$$A = F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

ולבסוף נקבל

$$.F(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$

ב. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

ג. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 2, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$

ד. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

ה. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

ו. $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

ז. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

ח. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

ט. $f(x) = |x|e^{-|x|}$

2. הוכח כי $.I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$
הדרכה: לא קשה לראות ש־ $.I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ על ידי החלפת משתנים פולרית קבל את השוויון $.I^2 = \pi$

3.3 תכונות ונוסחאות

בסעיף זה נמנה מספר תכונות ונוסחאות כלליות עבור ההתמרת פוריה המאפשרות לנו במקרים רבים לחשב אותה יותר מהר ובצורה יותר נוחה. נשתמש לפעמים בסימן $\mathcal{F}[f]$ או F בכדי לציין את ההתמרת פוריה של $f \in G(\mathbb{R})$.

3.1 ליניאריות: לכל $f, g \in G(\mathbb{R})$ ולכל $a, b \in \mathbb{C}$, הפונקציה $af + bg$ נמצאת ב־$G(\mathbb{R})$ ובנוסף לכך

$$\mathcal{F}[af + bg](\omega) = a\mathcal{F}[f](\omega) + b\mathcal{F}[g](\omega)$$

תכונה זו נובעת מייד מן הליניאריות של האינטגרל הלא־אמיתי.

3.2 לכל $f \in G(\mathbb{R})$, אם f מקבלת ערכים ב־$\mathbb{R}$ בלבד, אזי

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F(-\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\omega)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx} \\ &= \overline{F(\omega)} \end{aligned}$$

■

3.3 אם $f \in G(\mathbb{R})$ היא פונקציה ממשית וזוגית אזי F היא פונקציה ממשית וזוגית.
אם f ממשית ואי-זוגית אזי F היא פונקציה מדומה טהורה ואי-זוגית.

הוכחה: נסתפק בהוכחת הטענה הראשונה. נניח כי f היא פונקציה ממשית וזוגית. אזי

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos\omega x - i\sin\omega x]\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx \end{aligned}$$

האינטגרל השני התאפס כי $f(x)\sin\omega x$ היא פונקציה אי-זוגית מעל $\mathbb{R}$. לכן נותרנו רק עם החלק הממשי של ההתמרה. בנוסף לכך קבלנו שאם f ממשית וזוגית אז

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx. \quad \blacksquare$$

הזוגיות של $F(\omega)$ נובעת מן הזוגיות של $\cos\omega x$.

3.4. נוסחת ההזזה: תהי $f \in G(\mathbb{R})$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. אזי הפונקציה

$$g(x) = f(ax+b)$$

שייכת ל־ $G(\mathbb{R})$, ו־

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})$$

הוכחה:

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)e^{-i\omega x}\,dx.$$

נציב $y = ax+b$ ונקבל

$$a>0 \implies \mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(\frac{y-b}{a})}\frac{dy}{a}$$

$$a<0 \implies \mathcal{F}[g](\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(\frac{y-b}{a})}\frac{dy}{a}.$$

לכן, בכל מקרה, נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{i\omega y}{a}}\,dy \\ &= \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})\end{aligned}$$

■

שני מקרים מיוחדים של הנוסחה האחרונה הם כאשר:

א. $b = 0$. כלומר, $g(x) = f(ax)$, $a \neq 0$, ואז

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})$$

ב. $a = 1$. כלומר $g(x) = f(x+b)$, ואז

$$\mathcal{F}[g](\omega) = e^{i\omega b}\mathcal{F}[f](\omega)$$

בגלל השימושים של התמרת פוריה בפיזיקה ובהנדסת חשמל, מקובל לפרש את המשתנה x כזמן ואת המשתנה ω כתדר. במונחים אלה אפשר לפרש את הנוסחה האחרונה כך: הזזה בזמן שקולה לסיבוב בתדר.

3.5 לכל $f \in G(\mathbb{R})$ ולכל $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\Big[e^{icx}f(x)\Big](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big[e^{icx}f(x)\Big](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{icx}f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-c)x}\,dx \\ &= \mathcal{F}[f](\omega - c)\end{aligned}$$

■

נוסחה זו יכולה להתפרש באופן דומה לנוסחה הקודמת: סיבוב בזמן שקול להזזה בתדר.

3.6 נוסחאות המודולציה (Modulation): לכל $f \in G(\mathbb{R})$ ולכל $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[f(x)\cos cx](\omega) = \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)+\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2}$$

$$\mathcal{F}[f(x)\sin cx](\omega) = \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)-\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2i}$$

הוכחה: נוכיח רק את הנוסחה הראשונה. הוכחת הנוסחה השנייה דומה לחלוטין.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)\cos cx](\omega) &= \mathcal{F}\left[f(x)\frac{e^{icx}+e^{-icx}}{2}\right](\omega)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(x)e^{icx}\right](\omega)+\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(x)e^{-icx}\right](\omega)\\ &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)+\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.7 נוסחת הנגזרת: תהי f פונקציה רציפה כך ש־ $f, f' \in G(\mathbb{R})$ ו־ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. אזי

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$$

הוכחה:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx = \lim_{L,M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

נחשב את האינטגרל האחרון על ידי אינטגרציה לפי חלקים:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-M}^{L} - \int_{-M}^{L} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(L)e^{-i\omega L} - f(-M)e^{i\omega M} + i\omega\int_{-M}^{L} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

נתון לנו כי $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ולכן

$$\lim_{L,M\to\infty}\left[f(L)e^{-i\omega L} - f(-M)e^{i\omega M}\right] = 0.$$

מאחר ו־ $f \in G(\mathbb{R})$ הרי ש־

$$\lim_{L,M\to\infty} \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-M}^{L} f(x) e^{-i\omega x}\, dx = i\omega\, \mathcal{F}[f](\omega) \,. \quad \blacksquare$$

באופן דומה מוכיחים, כי תחת התנאים המתאימים,

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\omega) = (i\omega)^n\, \mathcal{F}[f](\omega)$$

3.8 תהי $f \in G(\mathbb{R})$ כך שהאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\, dx$ מתכנס. אזי ההתמרת פוריה של f גזירה ברציפות ומתקיים השוויון

$$\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$$

הוכחה: אם f רציפה ב־ $\mathbb{R}$ אז האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx$ מתכנס במידה שווה מעל $\mathbb{R}$, ולכן על פי הכלל של לייבניץ ניתן לבצע גזירה לפי ω מתחת לסימן האיטגרל,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{d}{d\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega}\left[f(x)e^{-i\omega x}\right] dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-i\omega x}dx = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= -i\mathcal{F}[xf(x)]
\end{aligned}$$

ונקבל את התוצאה. אחרת, אם ל־ f יש נקודות אי-רציפות, אז תהי $\{(a_n, b_n)\}_{n\in I}$ משפחת כל הקטעים בהם f רציפה (a_n יכול להיות שווה $-\infty$, b_n יכול להיות שווה ∞, והאיחוד של כל הקטעים שווה $\mathbb{R}$ ללא נקודות אי-הרציפות). אזי

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \sum_{n\in I} \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

כאשר הטור באגף ימין מתכנס במידה שווה מעל $\mathbb{R}$. לכן נוכל לגזור באופן דומה את $\mathcal{F}[f](\omega)$ מתחת לסימן הסכום וגם מתחת לסימן האינטגרל, ונקבל את התוצאה. $\blacksquare$

באופן דומה נוכל להוכיח שאם $f \in G(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, ואם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)|\, dx$ מתכנס, אזי ההתמרת פוריה של f גזירה ברציפות n פעמים ומתקיים השוויון

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}[f](\omega)$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$

ב. $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$

ג. $f(x) = 4xe^{-x^2}$

2. תהי

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

מצא את ההתמרת פוריה של

א. $f(x) = H(x)e^{-ax}$, $a > 0$

ב. $f(x) = H(x)e^{-ax}\cos bt$, $a > 0$, $b \neq 0$

ג. $g(x) = H(x)e^{-ax}\sin bt$, $a > 0$, $b \neq 0$

3. תהי $f \in G(\mathbb{R})$. חשב את ההתמרת פוריה של

א. $f(-x)$

ב. $f(x - x_0)$, x_0 קבוע ממשי

ג. $f(x)e^{i\omega_0 x}$, ω_0 קבוע ממשי

ד. $f(x)\sin\omega_0 x$

ה. $f(x)\cos\omega_0 x$

ו. $e^{ix}f(3x)$

ז. $f(2x)$

4. תהי $y(x)$ בעלת נגזרת שנייה רציפה, חסומה, ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, המקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0.$$

איזו משוואה דיפרנציאלית מקיימת $\mathcal{F}[y]$?

5. על ידי שימוש בהתמרת פוריה, פתור את הבעייה

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

6. תהי f פונקציה בעלת נגזרת מסדר שני בכל $\mathbb{R}$ כך ש־ $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, $tf(t)$, ו־ $t^2f(t)$ רציפות ואינטגרביליות בהחלט מעל $\mathbb{R}$. נסמן את ההתמרת פוריה של f על ידי F. מצא מספר ממשי $c \in \mathbb{R}$ כך שאם

$$f''(t) + (t^2 - 2)f(t) = cf(t), \qquad (t \in \mathbb{R})$$

אזי

$$F''(\omega) + (\omega^2 - 2)F(\omega) = cF(\omega)$$

7. נתון ש־ $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$ חשב את $\mathcal{F}[x^2f''(x) + 2f'''(x)](\omega)$.

3.4 ההתמרה ההפוכה ושוויון פלנשראל

ההתמרה של פוריה היא למעשה פעולה מתמטית הפועלת על פונקציה f ונותנת כתוצאה פונקציה שנייה F (פעולה מסוג זה נקראת לפעמים גם **אופרטור**). קיימת עוד פעולה פשוטה ודומה שמאפשרת לנו לחזור מההתמרת פוריה לפונקציה המקורית. לפעולה הזו אנו קוראים **ההתמרת פוריה ההפוכה**. באופן פורמלי, הפעולה הזו נתונה על ידי הנוסחה

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\, d\omega.$$

הבעייה שלנו תהיה לדעת תחת איזה תנאים ניתן להשתמש בה ובאיזה מובן היא אכן ההתמרה ההפוכה להתמרת פוריה. לפני שנענה על שאלות אלה נציין כאן כי בספרים שונים ההגדרות של התמרת פוריה וההתמרה ההפוכה לה הן שונות מכפי שאנו הגדרנו אותן בספר זה. בספרים מסוימים, ההגדרה של התמרת פוריה זהה להגדרת ההתמרה ההפוכה אצלנו, עם או בלי המקדם $\frac{1}{2\pi}$ לפני סימן האינטגרל. בספרים אלה, כמובן, ההתמרה ההפוכה מוגדרת כפי שאנו הגדרנו את התמרת פוריה עצמה. בספרים מסוימים מופיע המקדם $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ לפני סימן האינטגרל בשתי הנוסחאות. ההבדלים האלה הם טכניים לגמרי, וכל מה שחשוב הוא שהביטוי $e^{-i\omega x}$ יופיע באחת משתי הנוסחאות, והביטוי $e^{i\omega x}$ יופיע בנוסחה השנייה. מכפלת המקדמים שלפני סימן האינטגרל שבשתי הנוסחאות צריך להיות $\frac{1}{2\pi}$.

משפט 3.3: (התמרת פוריה הפוכה) אם $f \in G(\mathbb{R})$ אזי בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ בה קיימות הנגזרות החד-צדדיות מתקיים השוויון

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega.$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega &= \int_{-M}^{M}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right]e^{i\omega x}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left[\int_{-M}^{M}e^{-i\omega y}e^{i\omega x}\,d\omega\right]dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left[\frac{e^{i\omega(x-y)}}{i(x-y)}\Big|_{-M}^{M}\right]dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{2\sin M(x-y)}{x-y}\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{f(y)\sin M(x-y)}{x-y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(y)\sin M(x-y)}{x-y}\,dy
\end{aligned}$$

נציב $t=y-x$ ונקבל

$$\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt.$$

נוכיח ש־

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt = \frac{f(x+)}{2}$$

ו־

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt = \frac{f(x-)}{2}.$$

נוכיח את השוויון הראשון בלבד. את השוויון השני מוכיחים באותה הצורה, או שניתן לקבלו מן הראשון על ידי הצבה.

נפרק את האינטגרל שבשוויון הראשון לסכום של שני אינטגרלים:

$$\int_{0}^{\infty}f(x+t)\tfrac{\sin Mt}{t}dt = \int_{0}^{\pi}f(x+t)\tfrac{\sin Mt}{t}dt + \int_{\pi}^{\infty}f(x+t)\tfrac{\sin Mt}{t}dt.$$

הבחירה של π בגבולות האינטגרציה היא שרירותית. ניתן להשתמש בכל קבוע חיובי

אחר. נגדיר את הפונקציה

$$.g(t)=\begin{cases}\frac{f(x+t)}{t}, & t>\pi\\ 0, & t\le\pi\end{cases}$$

מן העובדה ש־ $f\in G(\mathbb{R})$ נובע שגם $g\in G(\mathbb{R})$. מהוכחת סעיף 3 של משפט 3.1 יוצא ש־

$$.\lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\sin Mt\,dt=0$$

כלומר,

$$.\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}\,dt=0$$

לכן נותר לנו רק לטפל בגבול

$$.\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt$$

הפונקציה

$$h(t)=\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$$

גם היא רציפה בקטע $[0,\pi]$ (בנקודה $x=0$ על פי הנחת המשפט) ולכן על ידי שימוש בחלק 3 של משפט 3.1, נקבל

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt\\
&=\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\sin Mt\,dt+\frac{1}{\pi}f(x+)\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}\,dt\right]\\
&=\frac{1}{\pi}f(x+)\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}dt
\end{aligned}$$

נשאר לבדוק אם הגבול האחרון קיים ושווה $\frac{\pi}{2}$ ובכך תסתיים הוכחת המשפט. על ידי ההצבה $u=Mt$ נקבל ש־

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}dt=\int_{0}^{M\pi}\frac{\sin u}{u}du$$

ולכן

$$\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}dt=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

בהנחה שהאינטגרל שבאגף ימין מתכנס.

טענה: $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$.

הוכחת הטענה: הפונקציה $\frac{\sin u}{u}$ רציפה בקטע $[0,\infty)$ ולכן בכדי להוכיח את התכנסות האינטגרל יספיק להוכיח שהגבול

$$\lim_{R\to\infty}\int_a^R \frac{\sin u}{u}du$$

קיים עבור $a>0$ כלשהו. על ידי אינטגרציה לפי חלקים נקבל:

$$\int_a^R \frac{\sin u}{u}du = -\frac{\cos u}{u}\Big|_a^R - \int_a^R \frac{\cos u}{u^2}du\ .$$

ברור ש־

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\cos R}{R}=0$$

וש־

$$\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \le \frac{1}{u^2}\ .$$

הפונקציה $\frac{1}{u^2}$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,\infty)$, לכל $a>0$, ולכן האינטגרל שלנו מתכנס. בגלל שהאינטגרל מתכנס ניתן לקבל את ערכו על ידי כל גבול מן הצורה

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{R_m}\frac{\sin u}{u}du$$

כאשר $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ היא סדרה כלשהיא השואפת לאינסוף. נקח את $R_m=(m+\frac{1}{2})\pi$, כאשר m הוא מספר טבעי, ונקבל

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = \lim_{m\to\infty}\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}du\ .$$

על ידי ההצבה $t=\frac{u}{m+\frac{1}{2}}$ נקבל

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}du = \int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{t}dt\ .$$

מהוכחת משפט דיריכלה (ראה הוכחת משפט 2.6)

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{t}dt &= \lim_{m\to\infty}\int_0^\pi \frac{2\sin\frac{1}{2}t}{t}\cdot\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt\\ &= \frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{2\sin\frac{1}{2}t}{t} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

■

תוצאה מיידית ממשפט 3.3 היא: אם $f \in G(\mathbb{R})$, f רציפה, ו־f' רציפה למקוטעין, אזי מתקיימות שתי הנוסחאות הבאות:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\
f(x) &= \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega .
\end{aligned}$$

אם נניח שגם $\mathcal{F}[f] \in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega(-x)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}f(-x)
\end{aligned}$$

כלומר, תחת התנאים הנ"ל על f ועל $\mathcal{F}[f]$, קבלנו את הנוסחה הבאה:

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{1}{2\pi}f(-x) .$$

דוגמה 4: בדוגמא 1 ראינו שההתמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ היא

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} .$$

ברור כי שתי הפונקציות האלה נמצאות במרחב $G(\mathbb{R})$, רציפות, וגזירות ברציפות. לכן מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל כי

$$\begin{aligned}
e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{i\omega x}\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}[\cos\omega x + i\sin\omega x]\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\pi(1+\omega^2)}\,d\omega + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}\,d\omega
\end{aligned}$$

החלק המדומה מתאפס בגלל ש־$e^{-|x|}$ היא פונקציה ממשית (או בגלל ש־$\frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}$ היא

פונקציה אי-זוגית). לכן נקבל את הנוסחה

$$.\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega = e^{-|x|}$$

דוגמה 5: בדוגמא 2 ראינו כי ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1, & -b\le x\le b\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

היא

$$.F(\omega)=\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}$$

מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל שלכל $|x|\neq b$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}e^{i\omega x}\,d\omega\\
&= \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega b\cos\omega x}{\omega\pi}\,d\omega + \lim_{M\to\infty} i\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega b\sin\omega x}{\omega\pi}\,d\omega\\
&= \lim_{M\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^M\frac{\sin\omega b\cos\omega x}{\omega}\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega b\cos\omega x}{\omega}\,d\omega
\end{aligned}$$

בנקודות $x=\pm b$, f אינה רציפה ולכן, לפי משפט 3.3, הערך של האינטגרל בנקודות אלה שווה לממוצע של הגבולות החד־צדדים, השווה ל־$\frac{1}{2}$ בשתי הנקודות. לכן נקבל את הנוסחה

$$.\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega b\cos\omega x}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}1, & |x|<b\\ \frac{1}{2}, & |x|=b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

אם נבחר למשל $x=0$ אז נקבל את הנוסחה

$$.\int_0^\infty\frac{\sin\omega b}{\omega}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$$

נעבור עכשיו להצגת נוסחת פלנשראל בשתי צורותיה השונות. נוסחה זו מקבילה לשוויון פרסבל עבור טורי פוריה. לא נוכל לתת לה הוכחה מדויקת במסגרת ספר זה, אך ננסה להסביר מדוע היא נכונה.

נוסחת פלנשראל (Plancherel): אם $f \in G(\mathbb{R})$ ו־ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty$ אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2\,d\omega < \infty$$

ובנוסף לכך

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2\,d\omega.$$

נוסחה זו נקראת לפעמים גם **נוסחת שימור אנרגיה**, והיא למעשה מקרה פרטי של הנוסחה הבאה.

נוסחת פלנשראל מוכללת: אם $f, g \in G(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty$, ואם $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 < \infty$, אזי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\,\overline{\mathcal{F}[g](\omega)}\,d\omega.$$

אם נקח $f = g$ אז נקבל את הנוסחה הקודמת כמקרה פרטי. נכונות הנוסחה תוצדק על ידי ההסבר החלקי הבא:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\,\overline{\mathcal{F}[g](\omega)}\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\left(\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}\,dx}\right)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\overline{g(x)}e^{i\omega x}\,dx\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\right)\overline{g(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx
\end{aligned}$$

דוגמה 6: תהי $f(x) = e^{-|x|}$. על סמך דוגמא 1, $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, ולכן מנוסחת פלנשראל נקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-|x|}\right)^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\right]^2 d\omega.$$

מכיוון ש־ $\left(e^{-|x|}\right)^2 = e^{-2|x|}$ ו־

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2\pi}$$

הרי ש־
$$.\int_0^\infty \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$

דוגמה 7: לכל קבוע ממשי $b>0$, תהי
$$.f_b(x)=\begin{cases}1, & |x|\le b\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

על סמך דוגמא 2
$$.\mathcal{F}[f_b](\omega)=\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}$$
נבחר שני קבועים $0<a<b$. אזי מנוסחת פלנשראל המוכללת נקבל
$$.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)f_b(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f_a](\omega)\overline{\mathcal{F}[f_b](\omega)}\,d\omega$$
את האינטגרל הראשון קל לחשב:
$$.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)f_b(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}dx=\frac{a}{\pi}$$
כמו־כן
$$.\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f_a](\omega)\overline{\mathcal{F}[f_b](\omega)}\,d\omega=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega\sin b\omega}{\omega^2}\,d\omega$$
לכן, לכל $a,b>0$,
$$.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega\sin b\omega}{\omega^2}\,d\omega=\pi\min(a,b)$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$ **ב.** $f(x)=\dfrac{\cos ax}{a^2+x^2}$ **ג.** $f(x)=\dfrac{\sin bx}{a^2+x^2}$

2. על ידי שימוש בתוצאות של תרגילים קודמים, חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ **ב.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$

ג. $\displaystyle\int_0^\infty \left[\frac{\sin u - u\cos u}{u^2}\right]^2 du$ ד. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,du$

ה. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$ ו. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\pi x}{1-x^2}\,dx$

ז. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\pi x\cos\pi x}{1-x^2}\,dx$ ח. $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{x\sin\pi x}{1-x^2}\right)^2 dx$

3. על ידי שימוש בהתמרת פוריה של

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le a\\ 1, & -a\le x\le 0\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}\qquad (a>0)$$

חשב את האינטגרל

$$.\int_0^\infty \frac{\cos ax-1}{x}\sin bx\,dx,\qquad b>0$$

4. חשב את האינטגרל

$$.\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)},\qquad a,b>0$$

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי F ההתמרת פוריה של f. ידוע כי

$$F(\omega)=\begin{cases}1-\omega^2, & |\omega|\le 1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$$

מצא את f.

6. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה אי-זוגית, רציפה, ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$. ידוע כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx=\begin{cases}1-\omega, & |\omega|\le 1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$$

מצא את f.

3.5 קונבולוציה

יהיו f ו־g שתי פונקציות נתונות. קיימות פעולות שונות, אותן אנו מכירים, בין f ו־g כמו $f+g$, $f{\cdot}g$, או $f{\circ}g$ (הרכבה). בסעיף זה נגדיר פעולה חדשה בין שתי פונקציות, שהיא בעלת חשיבות רבה לנושא של התמרות אינטגרליות. הפעולה נקראת **קונבולוציה (convolution)** והיא מסומנת על ידי $f*g$. יהיו f ו־g פונקציות אשר תחום ההגדרה שלהם הוא $\mathbb{R}$. לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

בתנאי שהאינטגרל קיים. על ידי הצבה ניתן לבדוק בקלות ש־

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

ולכן נקבל ש־

$$f*g = g*f.$$

כלומר פעולת הקונבולוציה היא פעולה קומוטטיבית. ישנן עוד כמה תכונות יסודיות לפעולת הקונבולוציה שנזכיר בהמשך, על פי מידת הצורך. אחת מהן היא:

> **טענה 3.4:** אם f ו־g אינטגרביליות ואינטגרבילות בהחלט מעל $\mathbb{R}$, אזי הקונבולוציה $f*g$ קיימת והיא אינטגרבילית בהחלט.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \right| dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,dy\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dx \right] \cdot |g(y)|\,dy
\end{aligned}$$

נתון כי f אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ולכן על ידי הצבה נקבל ש־

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

כאשר ערך האינטגרל אינו תלוי ב־y. לכן

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|\,dx &\le \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\right]|g(y)|\,dy\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\,dy\right)<\infty\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

החשיבות של פעולת הקונבולוציה מתבטאת בנוסחה הבאה.

משפט 3.5: לכל $f,g\in G(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[f*g](\omega)=2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega).$$

הוכחה: מהנתון $f,g\in G(\mathbb{R})$ נובע כי $f*g$ אינטגרבילית בהחלט. זה לא תמיד נכון ש־$f*g$ רציפה למקוטעין, אך למרות זאת ניתן לבצע את הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}g(y)e^{-i\omega y}\,dx\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}\,dx\right)g(y)e^{-i\omega y}\,dy\end{aligned}$$

קל לבדוק (על ידי הצבה) כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}\,dx=\mathcal{F}[f](\omega).$$

למעשה, האינטגרל באגף שמאל אינו תלוי במשתנה y. לכן

$$\mathcal{F}[f*g](\omega)=\mathcal{F}[f](\omega)\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-i\omega y}\,dy=\mathcal{F}[f](\omega)\cdot2\pi\cdot\mathcal{F}[g](\omega). \qquad \blacksquare$$

משפט 3.5 מציג את החשיבות של פעולת הקונבולוציה עבורנו, אך נשתמש בו בדרך כלל בצורה עקיפה. לרוב, נתונה לנו הפונקציה $\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)$, כאשר הפונקציות f ו־g ידועות. המטרה היא למצוא פונקציה h כך ש־ $\mathcal{F}[h](\omega)=\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)$. במילים אחרות, אנו מעוניינים למצוא את ההתמרה ההפוכה של $\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)$. ממשפט 3.5

אנו למדים כי אכן $h(x) = \frac{1}{2\pi}(f*g)(x)$.

תרגילים

1. על ידי שימוש בהתמרת פוריה, פתור את המשוואות האינטגרליות הבאות:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = e^{-\frac{x^2}{2}}$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+a^2}\,dt = \frac{1}{x^2+b^2}, \quad (0<a<b)$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \frac{1}{x^2+1}$

ד. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}f(t)\,dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

2. לכל $a>0$ נגדיר את הפונקציות:

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 0, & |x|\geq a \end{cases} \qquad g_a(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x|}{a}, & |x|<a \\ 0, & |x|\geq a \end{cases}$$

חשב את $f_a * f_a$ ואת $g_a * g_a$.

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי F ההתמרת פוריה של f. ידוע כי

$$F(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-s)e^{-|s|}ds = \begin{cases} \omega^2, & 0\leq\omega\leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את f.

4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי F ההתמרת פוריה של f. הראה שאם $F(\omega)=0$ לכל $\omega>\omega_0$ אזי לכל $a>\omega_0$.

$$f(x) * \frac{\sin ax}{\pi x} = f(x).$$

5. תהי F ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0\leq x<1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא פונקציה g כך שההתמרת פוריה G של g מקיימת $G(\omega) = [F(\omega)]^2$.

3.6 שימושים למשוואות דיפרנציאליות חלקיות

בסעיף זה נדגים את השימוש בהתמרת פוריה בפתרון כמה בעיות קלאסיות בתחום המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות. אנו יוצאים מן ההנחה כי הקורא מתמצא בתחום זה או שהוא לומד אותו במקביל, ולכן לא נכנס לכל פרטי הפרטים הנוגעים לו.

3.6.1 משוואת החום

משוואת החום ההומוגנית החד־מימדית על כל הציר הממשי נתונה על ידי המשוואה

$$u_t - ku_{xx} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty)$$

כאשר u היא פונקציה של המשתנים x ו־t, x היא נקודה על הציר, ו־t היא נקודה בזמן. ציר המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מייצג מוט אינסופי (משני הצדדים) העשוי מחומר אחיד בעל צפיפות אחידה. מניחים כי המוט מבודד לגמרי, ולכן אין כניסה או יציאה של חום מן המוט החוצה. הערך $u(x,t)$ הוא הטמפרטורה בנקודה x על המוט בזמן t. k הוא קבוע פיזיקאלי חיובי התלוי בסוג ובצפיפות החומר ממנו עשוי המוט. המשוואה היא מודל מתמטי פשוט לתופעת ההתפשטות של החום לאורך המוט במשך הזמן. בכדי לקבוע פתרון מסוים יש לדעת את מצב הטמפרטורה על כל נקודה של המוט בזמן מסוים. לכן נניח שנתון לנו תנאי התחלה מן הצורה

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

כאשר $f \in G(\mathbb{R})$. הנחה זו שקולה לעובדה שכמות החום האצורה במוט היא סופית ושהתפלגות הטמפרטורות על המוט היא רציפה למקוטעין. נדרוש שתנאי זה יתקיים גם עבור u, u_x, u_t, ו־u_{xx} (כל אחד מהם מגדיר פונקציה של x אם קובעים את t).

הרעיון הכללי לפתרון הבעייה הוא שבמקום לנסות למצוא את u באופן ישיר, יהיה יותר קל למצוא את ההתמרת פוריה של u שנסמנה על ידי U (ההתמרה ביחס למשתנה x כמובן, למשתנה t נתייחס כאל פרמטר). הסיבה לכך היא שכשמפעילים את התמרת פוריה על הנגזרת החלקית u_x הנגזרת החלקית תעלם (ראה נוסחת הנגזרת 3.7). במקרה שלנו, הפעלת התמרת פוריה על משוואת החום תביא אותנו למשוואה רגילה מסדר ראשון עבור U. המחיר שנשלם מתבטא בכך שמקדמי המשוואה הרגילה אינם קבועים. בשלב השני נשתמש בנוסחת ההתמרה ההפוכה בכדי לקבל את u, ובכך יסתיים פתרון הבעייה.

נגדיר

$$.U(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

כלומר, $U(\omega,t)$ היא ההתמרת פוריה של $u(x,t)$ ביחס למשתנה x. נגזור את U לפי t:

$$.U_t(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

מאחר ו־ $u_t=ku_{xx}$, נוכל לרשום

$$.U_t(\omega,t)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

מנוסחת הנגזרת של התמרת פוריה (נוסחה 3.7) נקבל שכל פונקציה $g\in G(\mathbb{R})$ שגזירה פעמיים מתקיים

$$\mathcal{F}[g''](\omega)=-\omega^2\mathcal{F}[g](\omega)$$

ולכן

$$.U_t(\omega,t)=k\mathcal{F}[u_{xx}](\omega,t)=-k\omega^2U(\omega,t)$$

קבלנו משוואה רגילה מאוד פשוטה:

$$U_t+k\omega^2U=0$$

שבה מופיעה רק נגזרת ביחס למשתנה t. קל למצוא שהפתרון הכללי למשוואה זו הוא

$$U(\omega,t)=A(\omega)e^{-k\omega^2t}$$

כאשר $A(\omega)$ היא פונקציה שרירותית של ω. בכדי לקבוע את $A(\omega)$ נשתמש בתנאי ההתחלה על u:

$$.A(\omega)=U(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

לכן

$$A(\omega)=F(\omega)$$

כאשר F היא ההתמרת פוריה של f (שנתונה לנו). מצאנו אם כן כי

$$.U(\omega,t)=F(\omega)e^{-k\omega^2t}$$

נותר לנו למצוא את ההתמרה ההפוכה של U בכדי לקבל את הפתרון u של משוואת החום. ידוע לנו ש־F היא ההתמרת פוריה של f, ולכן אם נוכל למצוא פונקציה p אשר ההתמרת פוריה שלה ביחס למשתנה x היא $e^{-k\omega^2 t}$ אז נוכל להשתמש במשפט הקונבולוציה 3.5 בכדי לקבל את u.

בדוגמא 3 מצאנו כי ההתמרת פוריה של $g(x) = e^{-x^2}$ היא $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. בנוסף לכך יש לנו גם את נוסחת ההזזה 3.4: אם $h(x) = cg(ax)$, כאשר $a \neq 0$ אזי

$$.\mathcal{F}[h](\omega) = \tfrac{c}{|a|} \mathcal{F}[g](\tfrac{\omega}{a})$$

במקרה של $g(x) = e^{-x^2}$ נקבל

$$.\mathcal{F}[h](\omega) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

אנו מעוניינים בקבועים a ו־c כך ש־

$$.\frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} = e^{-k\omega^2 t}$$

משוויון זה יוצא בקלות ש־ $a = \frac{1}{2\sqrt{kt}}$ ו־ $c = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}$. לכן אם נקח

$$p(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

אז

$$.P(\omega,t) = \mathcal{F}[p](\omega,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,t) e^{-i\omega x}\, dx = e^{-k\omega^2 t}$$

לבסוף, ממשפט 3.5 נקבל

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} (f * p)(x,t)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(x-y,t)\, dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt^2}}\, dy \end{aligned}$$

וקבלנו את הצורה הסופית של הפתרון למשוואת החום. הפונקציה $e^{-\frac{x^2}{4kt^2}}$ נקראת לפעמים **הגרעין של משוואת החום** או **גרעין גאוס**. יש לשים לב לעובדה שבשום שלב לא היינו זקוקים לחשב את F, וזה לא מופיע גם בצורה הסופית של הפתרון. ההתמרת פוריה של

f או של u לא היתה אלא מכשיר שבאמצעותו הגענו לפתרון.

3.6.2 משוואת לפלס על חצי מישור

עכשיו ננסה לפתור את משוואת לפלס על חצי המישור העליון. כלומר,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < y).$$

מטרתנו היא למצוא פתרון $u(x,y)$ המוגדר ורציף לכל x ולכל $y \geq 0$, והמקיים את תנאי השפה

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

כאשר f היא פונקציה נתונה מראש. תנאי זה אינו מספיק בכדי לקבוע פתרון יחיד ולכן במהלך הדיון נציין עוד תנאי נוסף. כמו במשוואת החום, נגדיר

$$U(\omega,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\omega x}\,dx$$

ו־

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = U(\omega,0).$$

נגזור את שני האגפים של המשוואה הראשונה פעמיים לפי y:

$$U_{yy}(\omega,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}(x,y)e^{-i\omega x}\,dx.$$

ממשוואת לפלס נובע כי $u_{yy} = -u_{xx}$, ולכן

$$U_{yy}(\omega,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,y)e^{-i\omega x}\,dx.$$

עכשיו נשתמש פעמיים בנוסחת הנגזרת של התמרת פוריה ונקבל:

$$U_{yy}(\omega,y) = \omega^2 U(\omega,y).$$

כלומר, עברנו מן המשוואה הדיפרנציאלית החלקית $u_{xx}+u_{yy}=0$ למשוואה חדשה, אשר בה כל הנגזרות הן לפי המשתנה y בלבד:

$$U_{yy} - \omega^2 U = 0.$$

תנאי ההתחלה $u(x,0)=f(x)$ הופך לתנאי התחלה חדש: $U(\omega,0)=F(\omega)$.
קל לבדוק שהפתרון הכללי של המשוואה החדשה הוא

$$U(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}$$

כאשר A ו־B הן פונקציות שרירותיות של ω. נציב $y=0$ בפתרון הכללי ונקבל

$$F(\omega)=A(\omega)+B(\omega).$$

ברור כי שוויון זה אינו מספיק בכדי לקבוע את A ואת B באופן יחיד. בכדי שיתקיים פתרון יחיד u וגם בכדי להצדיק את השימוש שעשינו בנוסחאות השונות בנוגע להתמרת פוריה (יש לזכור שהתמרת פוריה אינה קיימת עבור כל פונקציה ושהשימוש בנוסחאות השונות הנוגעות לה מותנה בתנאים מסוימים) עלינו לדרוש ש־u תשאף לאפס במידה שווה במשתנה y כאשר $|x|$ שואף לאינסוף. מסיבות שונות שלא נפרט כאן, דרישה זו מובילה לדרישה הבאה:

$$\begin{aligned}\omega>0 &\implies A(\omega)=0\\ \omega<0 &\implies B(\omega)=0.\end{aligned}$$

זהו התנאי הנוסף שהזכרנו קודם לכן. ממנו נובע כי

$$A(\omega)=\begin{cases}0, & \omega>0\\ F(\omega), & \omega\le 0\end{cases}\qquad B(\omega)=\begin{cases}F(\omega), & \omega\ge 0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned}U(\omega,y) &= \begin{cases}F(\omega)e^{-\omega y}, & \omega>0\\ F(\omega)e^{\omega y}, & \omega<0\end{cases}\\ &= F(\omega)e^{-|\omega|y}\end{aligned}$$

כמו במקרה של משוואת החום, גם כאן קבלנו את ההתמרה של הפתרון u בצורת מכפלה של שתי פונקציות של ω. פונקציה אחת F היא ההתמרת פוריה של הפונקציה הנתונה f. הפונקציה השנייה היא $e^{-|\omega|y}$. אם נמצא פונקציה p אשר ההתמרה שלה ביחס ל־x שווה ל־ $e^{-|\omega|y}$ אז ממשפט הקונבולוציה נקבל ש־

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)p(x-t,y)\,dt.$$

מדוגמא 1 נזכור כי ההתמרת פוריה של $e^{-|x|}$ היא $\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, ולכן על פי משפט ההתמרה

ההפוכה (ראה דוגמא 4)

$$.e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} e^{i\omega x}\, d\omega$$

אם נציב $-x$ במקום x נקבל מייד

$$.e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} e^{-i\omega x}\, d\omega$$

על ידי החלפת התפקידים של x ו־ω נקבל

$$e^{-|\omega|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2} e^{-i\omega x}\, dx$$

ולכן, אם $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$ אזי $\mathcal{F}[g](\omega) = e^{-|w|}$. מנוסחת ההזזה 3.4 אנו יודעים שאם $h(x) = c{\cdot}g(ax)$, כאשר $a \neq 0$, אזי

$$.\mathcal{F}[h](\omega) = \frac{c}{|a|} g(\tfrac{\omega}{a}) = \frac{c}{|a|} e^{-\left|\frac{\omega}{a}\right|}$$

אנו מעוניינים בקבועים a ו־c כך ש־

$$\frac{c}{|a|} e^{-\left|\frac{\omega}{a}\right|} = e^{-|\omega|y}$$

ולכן $a = c = \frac{1}{y}$. נזכור כי $y > 0$, ומכאן

$$.p(x,y) = c{\cdot}g(ax) = c\frac{2}{1+a^2x^2} = \frac{1}{y}{\cdot}\frac{2}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

לבסוף, צורת הפתרון הפרטי תהיה

$$.u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\, dt$$

ניתן לבדוק (על ידי הצבה במשוואה) כי זהו אכן פתרון למשוואת לפלס, אם כי בדיקה זו אינה קלה במיוחד. פתרון זה נקרא לפעמים **נוסחת פואסון (Poisson)** בחצי המישור $y > 0$.

3.7 שימושים לעיבוד אותות

פונקציה f נקראת **חסומה בזמן (time-limited)** אם קיים M כך ש־$f(x) = 0$ לכל $|x| \geq M$. פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$ נקראת **חסומה בתדר (band-limited)** אם קיים L כך ש־$\mathcal{F}[f](\omega) = 0$ לכל $|\omega| \geq L$. עובדה מעניינת היא שלא קיימת פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$ בעלת אנרגיה סופית, כלומר, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty$, שהיא חסומה גם בזמן וגם בתדר.

בסעיף זה נדון בשתי בעיות הנוגעות לפונקציות חסומות בתדר.

3.7.1 מסנן low-pass

תהי $f \in G(\mathbb{R})$, תהי F ההתמרת פוריה של f, ויהי $L > 0$ קבוע ממשי נתון. נגדיר את הפונקציה

$$F_L(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & |\omega| \leq L \\ 0, & |\omega| > L \end{cases}.$$

אומרים כי הפונקציה F_L מתקבלת על ידי העברת הפונקציה F דרך מסנן low-pass.
נשאלת השאלה האם קיימת פונקציה f_L כך ש־$\mathcal{F}[f_L] = F_L$ ומהי? במילים אחרות: מהי הפונקציה שיש לה אותה התמרת פוריה כמו f בקטע $[-L, L]$ אך היא חסומה בתדר על ידי L. בכדי לענות על השאלה נגדיר

$$G_L(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq L \\ 0, & |\omega| > L \end{cases}.$$

אזי ניתן לרשום

$$F_L(\omega) = F(\omega) G_L(\omega).$$

לכן נוכל לקבל את f_L באמצעות משפט הקונבולוציה (משפט 3.5), אם נדע מהן הפונקציות אשר ההתמרות פוריה שלהן הן F ו־G_L. הפונקציה הראשונה f נתונה לנו. בדוגמא 5 הראינו שלכל $|x| \neq L$ מתקיים

$$G_L(x) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega L}{\omega \pi} e^{i\omega x} \, d\omega.$$

מאחר ו־G_L היא פונקציה זוגית נוכל גם לרשום

$$G_L(x) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega L}{\omega \pi} e^{-i\omega x} \, d\omega.$$

כמו בסעיף הקודם, נחליף את התפקידים של x ו־ω ונקבל

$$.G_L(\omega) = \frac{1}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin Lx}{x}e^{-i\omega x}\,dx$$

לכן אם נקח $g_L(x) = \frac{2\sin Lx}{x}$ אז $\mathcal{F}[g_L](\omega) = G_L(\omega)$ במובן מסוים (שהוא מספיק חזק בכדי לקבל את התוצאה). ממשפט הקונבולוציה נקבל

$$.f_L = \frac{1}{2\pi}(f * g_L)$$

כלומר,

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{2\sin[L(x-y)]}{x-y}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)\sin[L(x-y)]}{x-y}\,dy \end{aligned}$$

מנוסחה זו יוצא מייד שאם $f \in G(\mathbb{R})$ ו־$\mathcal{F}[f](\omega) = 0$, לכל $L \geq |\omega|$, אזי

$$.f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)\sin[L(x-y)]}{x-y}\,dy$$

הנוסחה הזו היא אחד האיפיונים של הפונקציות החסומות בתדר שקטן או שווה ל־L.

3.7.2 משפט הדגימה של שנון (Shannon)

משפט הדגימה של שנון, הקרוי על שמו של המתמטיקאי האמריקאי Claude Shannon (1916–2001), מספק לנו דרך פשוטה לחישוב פונקציה החסומה בתדר קטן או שווה ל־L. זהו משפט מרכזי בתחום רשתות תקשורת ובתחום עיבוד אותות.

משפט 3.6: (משפט הדגימה של שנון, Shannon Sampling Theorem)
אם $f \in G(\mathbb{R})$ ו־$\mathcal{F}[f](\omega) = 0$, לכל $L \geq |\omega|$, אזי

$$.f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\tfrac{n\pi}{L}\right)\frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}$$

הוכחה: נסמן $F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$. ממשפט ההתמרה ההפוכה 3.3 (הניתן ליישום כלפי הפונקציה הנתונה),

$$f(x) = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \int_{-L}^{L} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

ולכן

$$.f(\tfrac{n\pi}{L}) = \int_{-L}^{L} F(\omega)e^{\frac{i\omega n\pi}{L}}\,d\omega, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

נרשום את הטור פוריה המרוכב של F בקטע $[-L,L]$ (ראה סעיף 2.3)

$$F(\omega) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}, \qquad |\omega|\le L$$

כאשר

$$.c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(\omega)e^{\frac{in\pi\omega}{L}}\,d\omega = \frac{1}{2L}f(\tfrac{n\pi}{L}), \qquad n\in\mathbb{Z}$$

נגדיר

$$.F_L(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}} = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$$

אזי F_L היא פונקציה מחזורית $2L$ "השווה" ל־F בקטע $[-L,L]$. (כזכור, הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$ אינו תמיד שווה ל־$F(\omega)$ בכל נקודה $-L\le\omega\le L$.) הפונקציה F מתאפסת מחוץ לקטע $[-L,L]$, ולכן נוכל לרשום

$$F(\omega) \text{ “}=\text{” } F_L(\omega)G_L(\omega)$$

כאשר

$$.G_L(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega|\le L \\ 0, & |\omega|>L \end{cases}$$

אזי

$$.F(\omega) \text{ “}=\text{” } \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}G_L(\omega)$$

לפני מספר עמודים הוכחנו כי G_L היא ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$.g_L(x) = \frac{2\sin Lx}{x}$$

מנוסחת ההזזה 3.4 נקבל ש־$e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}G_L(\omega)$ היא ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$.g_{L,n}(x) = \frac{2\sin(Lx-n\pi)}{x-\frac{n\pi}{L}}$$

לכן

$$.F(\omega) \text{ “}=\text{” } \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})\mathcal{F}[g_{L,n}](\omega)$$

כאשר נקח התמרה הפוכה של שני האגפים, נקבל

$$f(x) = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})g_{L,n}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi} \qquad \blacksquare$$

הערות

1. הוכחת משפט 3.6 קצת חסרה בשלבים בהן עברנו להתמרת פוריה ובחזרה. הוכחת כל הפרטים הנוגעים לשלבים אלה היא טכנית ואינה מוסיפה הבנה. רצוי לציין שכל פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$ שהיא חסומה בתדר היא גם רציפה ולמעשה היא אנליטית בכל $\mathbb{R}$.
2. החשיבות של משפט הדגימה של שנון מתבטא בכך שמשתמע ממנו כי פונקציות החסומות תדר קטן או שווה L נקבעות לחלוטין על ידי הערכים שלהם בסדרת נקודות, כך שהמרחק בין כל שתי נקודות סמוכות שווה $\frac{\pi}{L}$. בנוסף לכך, המשפט גם נותן לנו נוסחה מדויקת לחשב את f בכל נקודה x, באמצעות הערכים של f על הסדרה בלבד.
3. הפונקציה $\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$ שווה 1 כאשר $x = \frac{n\pi}{L}$ (זוהי נקודת אי-רציפות סליקה), ומתאפסת בכל נקודה $x = \frac{k\pi}{L}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq n$. לכן, לכל $n \in \mathbb{Z}$, קיים שוויון פורמלי בין שני האגפים של הנוסחה בנקודות $x = \frac{n\pi}{L}$.
4. אם נקח $f \in G(\mathbb{R})$ ונגדיר

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$$

אז נקבל פונקציה $g \in G(\mathbb{R})$ החסומה בתדר קטן או שווה ל־L, כך ש־g תהיה שווה ל־f בכל הנקודות $x = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. הפונקציות $\left\{\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהוות מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g\rangle = \frac{L}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \,.$$

3.8 תרגילים לחזרה כללית

1. חשב את ההתמרת פוריה של

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

והראה כי

$$\int_0^\infty\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{3\pi}{16}\,.$$

2. לכל $x>0$ נגדיר $f(x)=e^{-x}\cos x$. תהי $\tilde{f}$ ההמשכה האי-זוגית של f. הוכח שלכל $x\neq 0$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^3\sin xt}{t^4+4}\,dt=\tilde{f}(x)\,.$$

3. תהי

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

א. חשב את ההתמרת פוריה $F(\omega)$ של $f(x)$.

ב. חשב את $f*f$ ואת $(f*f)*(f*f)$.

ג. חשב את $\mathcal{F}[(f*f)*(f*f)]$.

ד. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{(1+x^2)^4}\,dx$.

4. תהי

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

א. חשב את $f*f$.

ב. חשב את האינטגרלים $\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ו־ $\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$.

5. לכל $a>0$, תהי $f_a(x)=e^{-a|x|}$, ותהי $g_a(x)=\frac{2a}{x^2+a^2}$.

א. חשב את ההתמרת פוריה של f_a.

ב. חשב את ההתמרת פוריה של g_a.

ג. האם קיימת פונקציה $\varphi(t)$ ב־ $G(\mathbb{R})$ כך ש־ $\frac{1}{x^2+49}=\int_{-\infty}^\infty\frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+16}dt$? אם כן, מצא את $\varphi(t)$, אם לא, נמק מדוע לא קיימת $\varphi(t)$.

ד. האם קיימת פונקציה $\varphi(t)$ ב־$G(\mathbb{R})$ כך ש־ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+49}dt = \frac{1}{x^2+16}$? אם כן, מצא את $\varphi(t)$, אם לא, נמק מדוע לא קיימת $\varphi(t)$.

6. תהי $f \in C(\mathbb{R}^n)$ אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}^n$. לכל ω_1, ω_2, ... , ו־ω_n ממשיים נגדיר

$$\mathcal{F}[f](\omega_1, \dots, \omega_n) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{פעמים } n} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(\omega_1 x_1 + \cdots \omega_n x_n)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

הפונקציה $\mathcal{F}[f]$ (המוגדרת על $\mathbb{R}^n$) נקראת **ההתמרת פוריה הרב מימדית של** f.

הראה שאם f_1, f_2, ... , ו־f_n הן פונקציות רציפות של משתנה יחיד השייכות ל־$G(\mathbb{R})$, ואם

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

אזי

$$\mathcal{F}[f](\omega_1, \dots, \omega_n) = \mathcal{F}[f_1](\omega_1)\mathcal{F}[f_2](\omega_2) \cdots \mathcal{F}[f_n](\omega_n).$$

פרק 4

התמרת לפלס

התמרת לפלס שימושית במתמטיקה וביישומיה השונים. ההיסטוריה וההתפתחות של התמרת לפלס קשורה באופן הדוק לפתרון משוואות דיפרנציאליות. לתאוריה של התמרת לפלס היסטוריה ארוכה בה היו מעורבים מתמטיקאים כמו אוילר, לגרנז', לפלס, פואנקרה, ודויטש אשר תרמו להתפתחותה בצורה משמעותית. פרק זה הוא מבוא לתאוריה ולשימושים של התמרת לפלס. בסעיפים 1, 2, 3, 5, 7 ו־8 מוצגת התאוריה הבסיסית וכמה מן השימושים הנפוצים שלה. בסעיף 4 אנו דנים בשתי "פונקציות" חשובות וכמה משימושיהם בהקשר להתמרת לפלס. בסעיף 6 ליקטנו מספר דוגמאות נוספות. מוצגים שם גם שימושים של התמרת לפלס לחישוב אינטגרלים.

4.1 הגדרה ודוגמאות

תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$. לכל מספר ממשי s נגדיר

$$\mathscr{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

במידה והאינטגרל מתכנס (קיים). על ידי כך, נקבל פונקציה $\mathscr{L}[f](s)$ הנקראת **התמרת לפלס (Laplace transform)** של f, על שמו של המתמטיקאי הצרפתי Pierre-Simon Laplace (1749-1827), שפיתח אותה עבור פתרון של משוואות דיפרנציאליות. כפי שנראה בדוגמאות ובמשפטים של פרק זה, ההתמרת לפלס של f בדרך כלל קיימת עבור ערכים מסוימים של s ואינה קיימת עבור ערכים אחרים.

לפעמים רצוי לחשוב ש־f מוגדרת על כל הישר הממשי $(-\infty,\infty)$ אך מתאפסת באופן זהותי בקטע $(-\infty,0)$, למרות שמלכתחילה היא אינה כזאת. במקרים בהן אין זה כך, נוכל פשוט להרחיב את הגדרת f על ידי הקביעה ש־$f(t)=0$, לכל $t<0$. הנחה זו

מאפשרת לנו להציג קשר פשוט שבין ההתמרת לפלס של f ובין התמרת פוריה של f:

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-is)t} f(t)\,dt = 2\pi\mathcal{F}[f](-is).$$

רצוי מאוד לזכור שהממשיות של ω בהתמרת פוריה היתה חשובה לנו.

לפני שנרחיב את הדיבור על התמרת לפלס ותכונותיה, נתחיל בהצגת מספר דוגמאות.

דוגמה 1: תהי $f(t) = 1$, לכל $t \geq 0$. אזי

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{L\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^L = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

עבור $s \leq 0$ האינטגרל אינו מתכנס, ולכן $\mathscr{L}\left[f\right](s) = \frac{1}{s}$ רק עבור $s > 0$. בדרך כלל, נדאג לציין את תחום ההגדרה של $\mathscr{L}\left[f\right]$ יחד עם הנוסחה עצמה.

דוגמה 2: תהי $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$. אזי

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a$$

דוגמה 3: תהי $f(t) = e^{zt}$, כאשר $z = x + iy \in \mathbb{C}$. אזי

$$\mathscr{L}\left[e^{zt}\right] = \int_0^\infty e^{-st} e^{(x+iy)t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-x-iy)t} dt = \frac{1}{s-z}, \qquad s > x$$

ברור כי דוגמא 2 היא מקרה פרטי של דוגמא זו.

התמרת לפלס היא פעולה ליניארית על קבוצת פונקציות. כלומר,

$$\mathscr{L}\left[af + bg\right](s) = a\mathscr{L}\left[f\right](s) + b\mathscr{L}\left[g\right](s)$$

עבור כל פונקציות f ו־g (עבורן אגף ימין מוגדר), ועבור כל סקלרים $a, b \in \mathbb{C}$. תכונה זו, של ליניאריות, היא תכונה חשובה ובסיסית.

דוגמה 4: תהי $f(t) = \sin at$, $a \in \mathbb{R}$. אפשר לחשב את $\mathscr{L}\left[\sin at\right](s)$ על פי ההגדרה (על ידי שימוש פעמיים באינטגרציה לפי חלקים). אנו נעשה זאת על ידי שימוש בתכונת הליניאריות ובדוגמא הקודמת. ראשית כל נשים לב כי

$$\sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}.$$

לכן

$$.\mathscr{L}\left[\sin at\right](s) = \mathscr{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right](s) = \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{iat}\right](s) - \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{-iat}\right](s)$$

מדוגמא 3 נקבל

$$.\mathscr{L}\left[\sin at\right](s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right] = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$$

דוגמה 5: תהי $f(t) = \cos at$, $a \in \mathbb{R}$. כמו בדוגמא הקודמת נוכל לקבל כי

$$.\mathscr{L}\left[\cos at\right](s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$$

בכל הדוגמאות מצאנו כי ההתמרת לפלס מוגדרת עבור כל s הגדול ממספר מסוים. כלומר, תחום ההגדרה של $\mathscr{L}[f](s)$ הוא בדרך כלל מן הצורה (c,∞) או $[c,\infty)$, עבור קבוע מסוים c (שתלוי כמובן ב־f). הסיבה לכך היא שאם $s_1 < s_2$ אזי $e^{-s_1 t} > e^{-s_2 t} > 0$, לכל $t \geq 0$, ולכן קל יותר לאינטגרל להתכנס. ננסח זאת באופן פורמלי.

משפט 4.1: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$. נניח שקיימים קבועים ממשיים a ו־K כך ש־

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \qquad t \geq 0$$

אזי $\mathscr{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$.

הוכחה: מההגדרה

$$.\mathscr{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

הפונקציה $e^{-st}f(t)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$. נוכיח שהיא אינטגרבילית בהחלט בקטע זה, לכל $s > a$

$$.\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right| dt = \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-st}Ke^{at}\, dt = \frac{K}{s-a} \qquad \blacksquare$$

הדוגמאות 1-5 מעידות על רמת הדיוק של משפט זה.

תרגילים

.1 האם קיימת התמרת לפלס עבור הפונקציה $f(t) = e^{t^2}$? אם היא קיימת, מצא אותה, ומצא היכן היא מוגדרת. אם לא, נמק מדוע היא אינה קיימת.

.2 מצא את ההתמרת לפלס של
$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}.$$

.3 הוכח שאם $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומחזורית p ($p > 0$), אזי
$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

.4 תהי $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה מחזורית 4 כך ש־
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ 1, & 2 < t \le 4 \end{cases}.$$
הוכח כי
$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{\tanh s}{s}.$$

4.2 נוסחאות ודוגמאות נוספות

נעבור עכשיו להצגת מספר נוסחאות שימושיות אשר יעזרו לנו בהמשך לחשב את ההתמרת לפלס של פונקציות רבות בצורה יעילה.

משפט 4.2: תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0, \infty)$ כך שנגזרתה f' קיימת ורציפה למקוטעין בקטע זה. נניח שקיימים קבועים ממשיים a ו־K כך ש־
$$|f(t)| \le K e^{at}, \qquad t \ge 0.$$
אזי ההתמרת לפלס של f', $\mathscr{L}[f'](s)$, מוגדרת לכל $s > a$, ובנוסף
$$\mathscr{L}[f'](s) = s\mathscr{L}[f] - f(0) \tag{4.1}$$

הוכחה: מן הנתונים ברור כי $e^{-st}f'(t)$ רציפה למקוטעין בכל קטע סופי $[0,L]$. יהיו

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < L$$

כל נקודות אי-הרציפות הפנימיות של $e^{-st}f'(t)$ בקטע $[0,L]$. נסמן גם $x_0 = 0$ ו־ $x_n = L$.
אזי, לכל $1 \le i \le n$, $e^{-st}f'(t)$ רציפה בקטע (x_{i-1}, x_i), ולכן

$$\begin{aligned}
\int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st}f'(t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^n \left[e^{-st}f(t)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + s\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st}f(t)\,dt \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[e^{-sx_i}f(x_i) - e^{-sx_{i-1}}f(x_{i-1}) \right] + s\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st}f(t)\,dt \\
&= e^{-sL}f(L) - f(0) + s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

על סמך משפט 4.1, $\mathscr{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$, וברור כי

$$\mathscr{L}[f](s) = \lim_{L\to\infty} \int_0^L e^{-st}f(t)\,dt, \qquad s > a.$$

בנוסף

$$\lim_{L\to\infty} \left| e^{-sL}f(L) \right| \le \lim_{L\to\infty} \left| e^{-sL}Ke^{aL} \right| = K \lim_{L\to\infty} e^{-(s-a)L} = 0, \qquad s > a$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f'](s) &= \lim_{L\to\infty} \int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt \\
&= \lim_{L\to\infty} \left[e^{-sL}f(L) - f(0) + s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt \right] \\
&= s\mathscr{L}[f](s) - f(0)
\end{aligned}$$

לכל $s > a$. ∎

ההכללה המיידית של נוסחת הנגזרת נתונה במשפט הבא.

משפט 4.3: נניח כי f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$ כולן מוגדרות ורציפות בקטע $[0,\infty)$, $f^{(n)}$ קיימת ורציפה למקוטעין בקטע זה, ונניח כי קיימים קבועים ממשיים a ו־K כך ש־

$$\left|f^{(j)}(t)\right| \le Ke^{at}, \qquad t \ge 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,n-1 .$$

אזי $\mathscr{L}\left[f^{(n)}\right](s)$ קיימת ומוגדרת עבור כל $s > a$ ו־

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n\mathscr{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{4.2}$$

הוכחה: עבור $n = 2$, למשל, נפעיל את משפט 4.2 פעמיים

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f''](s) &= s\mathscr{L}[f'](s) - f'(0)\\
&= s\left[s\mathscr{L}[f](s) - f(0)\right] - f'(0)\\
&= s^2\mathscr{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

הוכחה מלאה עבור כל n נובעת משימוש שיגרתי באינדוקציה. ∎

נוסחה דומה, במובן מסוים, לנוסחה האחרונה היא

$$\mathscr{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f](s) \tag{4.3}$$

ברור כי נוסחה זו מתקיימת תחת תנאים דומים לאלה שבמשפטים 4.2 ו־4.3. נוותר על הניסוח המדויק שלהם. בדרך כלל התנאים הדרושים ברורים מתוך ההוכחה. את הנוסחה יספיק להוכיח עבור $n = 1$ בלבד, מאחר ושאר המקרים נגזרים ממקרה זה בקלות (על ידי הפעלתו n פעמים). עלינו להוכיח כי

$$\mathscr{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f](s).$$

הוכחה: נתחיל מן האגף הימני ונגיע לשמאלי:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f](s) &= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = -\int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt\\
&= \int_0^\infty te^{-st}f(t)\,dt = \mathscr{L}[tf(t)](s)
\end{aligned}$$

∎

$$\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\mathscr{L}\left[f\right](s-a),\qquad a\in\mathbb{R} \tag{4.4}$$

הוכחה:

$$\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=\mathscr{L}\left[f\right](s-a).\quad\blacksquare$$

$$\mathscr{L}\left[f(at)\right](s)=\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f\right](\frac{s}{a}),\qquad a>0 \tag{4.5}$$

הוכחה:

$$\mathscr{L}\left[f(at)\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt$$

נציב $x=at$ על מנת לקבל

$$\mathscr{L}\left[f(at)\right](s)=\int_0^\infty e^{-s\frac{x}{a}}f(x)\,\frac{dx}{a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{a})x}f(x)\,dx=\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f\right](\frac{s}{a}).\quad\blacksquare$$

כל הנוסחאות שקבלנו עד עכשיו הן פשוטות אך שימושיות מאוד. על ידי השימוש בהן, ניתן לקבל בצורה פשוטה יותר את כל אחת מן הדוגמאות 1, 2, 4, ו־5.

דוגמה 6: נחשב את ההתמרת לפלס של $f(t)=t^n$,$n\in\mathbb{Z}_+$, בשתי שיטות.

שיטה 1: על סמך דוגמא 1 ונוסחה (4.3),

$$\mathscr{L}\left[t^n\cdot 1\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\left[1\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s},\qquad s>0.$$

קל לבדוק כי

$$\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s}=(-1)^n\frac{n!}{s^{n+1}}$$

ולכן

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](s)=\frac{n!}{s^{n+1}},\qquad s>0.$$

שיטה 2: ברור כי $f^{(n)}(t) = n!$, ולכן מנוסחה (4.2) נקבל

$$\begin{aligned}\frac{n!}{s} &= \mathscr{L}[n!](s) = \mathscr{L}\left[f^{(n)}\right](s) \\ &= s^n \mathscr{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

מאחר שעבור $f(t) = t^n$ מתקיים

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

נקבל

$$\frac{n!}{s} = s^n \mathscr{L}[t^n](s)$$

ולכן

$$\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0.$$

דוגמה 7: תהי $f(t) = e^{at}\sin bt$, $a, b \in \mathbb{R}$. נשתמש בנוסחאות (4.4) ו־(4.5) בכדי לחשב את $\mathscr{L}[f(t)](s)$.

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s) = \mathscr{L}[\sin bt](s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \qquad s > a.$$

דוגמה 8: נחשב את ההתמרת לפלס של $f(t) = e^{at}\cos bt$ באותו האופן

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s) = \mathscr{L}[\cos bt](s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \qquad s > a.$$

תהי $F(s)$ פונקציה המוגדרת לכל $x > a$. נוכל לשאול אם קיימת פונקציה $f(t)$ כך ש־$F(s) = \mathscr{L}[f](s)$. הפונקציה $f(t)$, אם היא קיימת, נקראת **ההתמרת לפלס ההפוכה** של $F(s)$. באופן כללי, התשובה לשאלה זו היא שלילית. התנאים המדויקים שעל $F(s)$ לקיים, בכדי שהיא תהיה התמרת לפלס של פונקציה מסוימת, אינם פשוטים. נסיים את הסעיף הנוכחי בכך שנציין את אחד מן התנאים ההכרחיים:

טבלת התמרות לפלס

	פונקציה	התמרת לפלס
1	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2	$e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3	$e^{zt}, \quad z \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-z}, \quad s > \mathrm{Re}(z)$
4	$\sin at, \quad a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
5	$\cos at, \quad a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6	$t^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
7	$e^{at}\sin bt, \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
8	$e^{at}\cos bt, \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
9	$u_c(t), \quad c > 0$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
10	$t^n e^{at}, \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
11	$f'(t)$	$s\mathscr{L}\left[f\right](s) - f(0)$
12	$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathscr{L}\left[f\right](s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
13	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\left[f\right](s)$
14	$e^{at}f(t), \quad a \in \mathbb{R}$	$\mathscr{L}\left[f\right](s-a)$
15	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f\right]\left(\frac{s}{a}\right)$

משפט 4.4: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$. נניח שקיימים קבועים ממשיים K ו־a כך ש־

$$|f(t)| \le Ke^{at}, \qquad t \ge 0 .$$

אזי

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left[f\right](s) = 0 .$$

הוכחה: לכל $s > a$,

$$\begin{aligned} |\mathscr{L}\left[f\right](s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\, dt \\ &\le \int_0^\infty e^{-st} K e^{at} dt = \frac{K}{s-a} \end{aligned}$$

ולכן $\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left[f\right](s) = 0$. ∎

לסיכום, נרכז את הנוסחאות והדוגמאות של סעיף זה והסעיף הקודם בטבלת ההתמרות לפלס, בכדי שנוכל להשתמש בהם בצורה נוחה יותר בהמשך. לפעמים נתייחס לנוסחה בהתאם למספרה בטבלה.

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $e^{-t}\cos 2t$

ב. $e^{-4t}\cosh 2t$

ג. $(t^2+1)^2$

ד. $3\cosh t - 4\sinh 5t$

ה. $t^n \sin t$

2. חשב את ההתמרת לפלס של $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. (רמז: חשב את $\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left[f\right](s)$.)

3. חשב את f אם ידוע כי $\mathscr{L}\left[f\right](s) = \frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right]$, $a > 0$.

4. הוכח את כל אחת מן הנוסחאות הבאות:

א. $$\mathscr{L}\left[\sin^2 t\right](s) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

ב. $\mathscr{L}\left[A\cos(\omega t+\theta)\right](s)=\dfrac{A(s\cos\theta-\omega\sin\theta)}{s^2+\omega^2}$

ג. $\mathscr{L}\left[\cos at\cosh at\right](s)=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

ד. $\mathscr{L}\left[(t^2-5t+6)e^{2t}\right]=\dfrac{6s^2-29s+36}{(s-2)^3}$

5. על ידי שימוש בהגדרה והתכונות של התמרת לפלס, חשב את כל אחד מן האינטגרלים הבאים:

א. $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$

ב. $\displaystyle\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t\,dt$

ג. $\displaystyle\int_0^\infty x^4e^{-x}dx$

ד. $\displaystyle\int_0^\infty x^6e^{-3x}dx$

4.3 שימושים למשוואות דיפרנציאליות רגילות

בסעיף זה נלמד כיצד נעזרים בהתמרות לפלס לפתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות הומוגניות מסדר שני בעלי מקדמים קבועים. הפונקציות הנעלמות יהיו מוגדרות בקטע $[0,\infty)$. הצורה הכללית של משוואות אלה היא

$$\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0, & t>0\\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1 \end{cases}$$

כאשר a, b, c, y_0, ו־ y_1, הם קבועים ממשיים נתונים. נתאר שיטה כללית למציאת הפתרון הפרטי $y(t)$. הקורא בודאי פגש שיטות שונות למציאת פתרון כזה הנלמדות בכל קורס סטנדרטי אודות משוואות דיפרנציאליות רגילות. אך השימוש בהתמרות לפלס אינו מוגבל למשוואות מסוג זה, והשיטה שנתאר ניתנת ליישום גם על משוואות מסדר גדול יותר, מערכות של משוואות, ועוד. נדגים את השימוש בהתמרת לפלס על ידי פתירת שלוש בעיות טיפוסיות בהתאמה לסוג השורשים של המשוואה האופיינית. בסוף הסעיף נסביר שיטה כללית לפתור כל בעייה מסוג זה.

דוגמה 9: נמצא פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t)-y'(t)-6y(t)=0, & t>0\\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1 \end{cases}$$

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה ונקבל

$$0 = \mathscr{L}[0] = \mathscr{L}[y'' - y' - 6y].$$

מתכונת הליניאריות של התמרת לפלס נקבל כי

$$\mathscr{L}[y'' - y' - 6y] = \mathscr{L}[y''] - \mathscr{L}[y'] - 6\mathscr{L}[y].$$

עכשיו נשתמש בנוסחת הנגזרת ונקבל (ראה נוסחאות 11 ו־12 שבטבלה)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[y'] &= s\mathscr{L}[y] - y(0) \\ \mathscr{L}[y''] &= s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0). \end{aligned}$$

על ידי שימוש בתנאי ההתחלה

$$(s^2 - s - 6)\mathscr{L}[y] - s + 2 = 0$$

ומזה יוצא כי

$$\mathscr{L}[y] = \frac{s-2}{s^2 - s - 6}.$$

נסמן על ידי $\mathscr{L}^{-1}$ את התמרת לפלס ההפוכה. בשלב זה נוכל רק לאמר כי $\mathscr{L}^{-1}$ קיימת. מאחר ו־ $\mathscr{L}$ היא העתקה ליניארית, הרי שגם $\mathscr{L}^{-1}$ היא העתקה ליניארית. כלומר

$$\mathscr{L}^{-1}[aF + bG](t) = a\mathscr{L}^{-1}[F](t) + b\mathscr{L}^{-1}[G](t)$$

כאשר a ו־ b הם סקלרים, $F(s)$ ו־ $G(s)$ הן התמרות לפלס של פונקציות מסוימות.

נוכל כעת לרשום

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2 - s - 6}\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-3)(s+2)}\right](t).$$

בינתיים אין לנו שיטה כללית למציאת התמרת לפלס הפוכה. למרות זאת, נוכל להשתמש בתוצאות שיש לנו בכדי למצוא אותה במקרה הנוכחי. לשם כך נפרק את השבר שלנו לסכום של שברים פשוטים

$$\frac{s-2}{(s-3)(s+2)} = \frac{1/5}{s-3} + \frac{4/5}{s+2}.$$

את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחד מן השברים הפשוטים נוכל למצוא בטבלה של הסעיף הקודם, ולכן

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-3)(s+2)}\right](t) \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1/5}{s-3}+\frac{4/5}{s+2}\right](t) \\ &= \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t)+\frac{4}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) \\ &= \frac{1}{5}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t} \end{aligned}$$

נזכיר לקורא כי הביטוי s^2-s-6 הוא **הפולינום האופייני** של המשוואה. הפונקציות e^{3t} ו־ e^{-2t} הם **הפתרונות הבסיסיים של המשוואה**.

לפעמים אין זה קל לפתור תרגילים מסוג זה אך, לעומת זאת, קל מאוד לבדוק אם הפתרון הפרטי שהתקבל מקיים את המשוואה. לכן מומלץ מאוד לבדוק תמיד את התשובות הסופיות.

דוגמה 10: נמצא פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t)-2y'(t)+y(t)=0, & t>0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-2 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathscr{L}\left[y''-2y'+y\right] \\ &= \mathscr{L}\left[y''\right]-2\mathscr{L}\left[y'\right]+\mathscr{L}\left[y\right] \\ &= \left[s^2\mathscr{L}\left[y\right]-sy(0)-y'(0)\right]-2\left[s\mathscr{L}\left[y\right]-y(0)\right]+\mathscr{L}\left[y\right] \\ &= (s^2-2s+1)\mathscr{L}\left[y\right]-s+4 \end{aligned}$$

לכן

$$\mathscr{L}\left[y\right]=\frac{s-4}{s^2-2s+1}=\frac{s-4}{(s-1)^2}.$$

עכשיו נפרק את השבר לסכום של שברים פשוטים

$$\mathscr{L}\left[y\right]=\frac{1}{s-1}-\frac{3}{(s-1)^2}.$$

אזי

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-1}-\tfrac{3}{(s-1)^2}\right](t) \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-1}\right](t)-3\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(s-1)^2}\right](t) \\ &= e^t-3te^t \end{aligned}$$

השתמשנו בנוסחאות 2 ו־10 שבטבלה.

דוגמה 11: נמצא עכשיו פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0, & t>0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathscr{L}\left[y''+2y'+5y\right] \\ &= \mathscr{L}\left[y''\right]+2\mathscr{L}\left[y'\right]+5\mathscr{L}\left[y\right] \\ &= \left[s^2\mathscr{L}\left[y\right]-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[s\mathscr{L}\left[y\right]-y(0)\right]+5\mathscr{L}\left[y\right] \\ &= (s^2+2s+5)\mathscr{L}\left[y\right]-s-2 \end{aligned}$$

ולכן

$$\mathscr{L}\left[y\right]=\frac{s+2}{s^2+2s+5}.$$

נציג שתי שיטות שונות למציאת $y(t)$.

שיטה 1: נרשום $s^2+2s+5=(s+1)^2+4$ (השלמה לריבוע), ולכן

$$\frac{s+2}{s^2+2s+5}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

הסיבה לצורת הרישום הזו היא שנוכל לנצל את הנוסחאות

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s)=\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad \text{ו־} \quad \mathscr{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s)=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

לכן

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{s+2}{s^2+2s+5}\right](t) \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{s+1}{(s+1)^2+4}\right](t)+\tfrac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{2}{(s+1)^2+4}\right](t) \\ &= e^{-t}\cos 2t+\tfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \end{aligned}$$

<u>**שיטה 2:**</u> נרשום $s^2+2s+5=(s+1-2i)(s+1+2i)$, ונפרק את השבר לסכום רגיל של שברים פשוטים

$$\frac{s+2}{s^2+5s+5}=\frac{1/2-i/4}{s+1-2i}+\frac{1/2+i/4}{s+1+2i}.$$

לכן

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{s+2}{s^2+2s+5}\right](t)\\
&= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{4})\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+1-2i}\right](t)+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{4})\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+1+2i}\right]\\
&= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{4})e^{-(1-2i)t}+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{4})e^{-(1+2i)t}
\end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בנוסחה 3 מהטבלה. הבעייה היחידה עם הפתרון שקבלנו כאן היא שהוא נתון על ידי פונקציות מרוכבות, בעוד שאולי רצוי לקבל הצגה ממשית שלו. אם נטרח להמשיך את הפיתוח נקבל

$$\begin{aligned}
y(t) &= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{4})e^{-t}\left[\cos 2t+i\sin 2t\right]+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{4})e^{-t}\left[\cos 2t-i\sin 2t\right]\\
&= e^{-t}\cos 2t+\tfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t
\end{aligned}$$

כפי שקבלנו בשיטה 1.

פתרנו, אם כן, שלוש דוגמאות מייצגות של משוואות דיפרנציאליות רגילות הומוגניות מסדר שני בעלות מקדמים קבועים. בדוגמא הראשונה שורשי הפולינום האופייני הם ממשיים ושונים. בדוגמא השניה השורשים ממשיים אך שווים. בדוגמא השלישית, השורשים מרוכבים (אך צמודים אחד לשני). שלושת הדוגמאות הם לכן אבות טיפוס של כל המשוואות הדיפרנציאליות מן הצורה הנ"ל. לכן, השיטות שהצגנו בשלושת דוגמאות אלה יכולות לשמש לפתרון כל בעייה מסוג זה.

נסכם את השיטה. נתונה המשוואה ההומוגנית

$$\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0, & t>0\\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1 \end{cases}$$

כאשר a, b, c, y_0, ו־y_1 הם קבועים ממשיים נתונים (ונניח כי $a\neq 0$). נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$(as^2+bs+c)\mathscr{L}\left[y\right](s)-(as+b)y_0-ay_1=0.$$

לכן

$$\mathscr{L}\left[y\right](s) = y_0\frac{as+b}{as^2+bs+c} + y_1\frac{a}{as^2+bs+c}$$

נסמן

$$F(s) = \frac{as+b}{as^2+bs+c}, \qquad G(s) = \frac{a}{as^2+bs+c}.$$

אזי

$$y(t) = y_0\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t) + y_1\mathscr{L}^{-1}\left[G\right](t).$$

נציין שהפונקציה $\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t)$ היא הפתרון למשוואה המקיימת את תנאי ההתחלה

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](0) = 1, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[F\right]'(0) = 0$$

והפונקציה $\mathscr{L}^{-1}\left[G\right](t)$ היא הפתרון למשוואה המקיימת את תנאי ההתחלה

$$\mathscr{L}^{-1}\left[G\right](0) = 0, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[G\right]'(0) = 1.$$

ניתן לחשב את $\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t)$ ו־$\mathscr{L}^{-1}\left[G\right](t)$ בדרך הבאה: אם $as^2+bs+c = a(s-\alpha)(s-\beta)$ כאשר α ו־β שונים, אז נוכל לרשום את F (וגם את G) בצורה

$$F(s) = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta}$$

ולכן

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

אם $as^2+bs+c = a(s-\alpha)^2$ אז נוכל לרשום את F (וגם את G) בצורה

$$F(s) = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{(s-\alpha)^2}$$

ולכן

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t}.$$

אם $as^2+bs+c = a(s-(\alpha+i\beta))(s-(\alpha-i\beta))$ כאשר α ו־β ממשיים, ו־$\beta \neq 0$. אזי נוכל לרשום את F (וגם את G) בצורה

$$F(s) = \frac{A\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{B(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

ולכן

$$.\mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t) = Ae^{\alpha t}\sin\beta t + Be^{\alpha t}\cos\beta t$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $\dfrac{3s-14}{s^2-4s+18}$ **ב.** $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

ג. $\dfrac{1}{s^2-3s+2}$ **ד.** $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

ה. $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$ **ו.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$

ז. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$ **ח.** $\dfrac{s^3}{s^4-16}$

ט. $\dfrac{1}{s^4+1}$ **י.** $\dfrac{2s^2+s-10}{(s-4)(s^2+2s+2)}$

2. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''+3y'-4y=0,\qquad y(0)=3,\quad y'(0)=-2$

ב. $y''-y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$

ג. $y''+4y'+4y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ד. $y''+4y=0,\qquad y(0)=2,\quad y'(0)=1$

ה. $y''+4y'+7y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1$

ו. $ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

4.4 פונקצית הביסייד ופונקצית הדלתא של דירק

בסעיף זה נלמד אודות שתי פונקציות מיוחדות, ההתמרות לפלס שלהן, ושימושים שונים אשר יש להן.

4.4.1 פונקצית הביסייד (Heaviside)

לכל קבוע ממשי $c \geq 0$, נגדיר פונקציה

$$u_c(t) = \begin{cases} 1, & c \leq t \\ 0, & 0 \leq t < c \end{cases}$$

שנקראת **פונקצית הביסייד**, על שמו של המתמטיקאי האנגלי Oliver Heaviside (1850-1925) אשר הגדיר אותן ועשה בהן שימושים שונים לפתרון משוואות דיפרנציאליות. זוהי פונקציה פשוטה אשר קל לחשב את ההתמרת לפלס שלה.

$$\mathscr{L}\left[u_c\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\, dt = \int_c^\infty e^{-st} dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0.$$

עבור $c = 0$, $u_0(t) = 1$ ו־$\mathscr{L}\left[u_0\right](s) = \frac{1}{s}$. הנוסחה אינה תקפה עבור $c < 0$ (מדוע?). ניתן להשתמש בנוסחה האחרונה בכדי לחשב ביתר קלות את ההתמרת לפלס של כמה פונקציות מסוג דומה.

דוגמה 12: יהיו $0 < c < d < \infty$ שני קבועים. נגדיר את הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} 1, & c \leq t < d \\ 0, & t \notin [c, d) \end{cases}.$$

נחשב את ההתמרת לפלס של f. ברור כי $f = u_c - u_d$, ולכן

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \mathscr{L}\left[u_c\right](s) - \mathscr{L}\left[u_d\right](s) = \frac{e^{-cs} - e^{-ds}}{s}.$$

נציין כי ההגדרה של f בנקודות c ו־d יכולה להיות שונה מזו שנתנו, מאחר ששינוי ערכי הפונקציה במספר סופי של נקודות אינו משפיע כלל על ההתמרת לפלס שלה.

דוגמה 13: תהי $f(t)=[t]$ פונקצית הערך השלם על הקטע $[0,\infty)$. כלומר, אם $n\in\mathbb{Z}$ ו־$n\le t<n+1$, אז $f(t)=n$. נחשב את ההתמרת לפלס של f. קל לראות כי

$$.f=u_1+u_2+u_3+\cdots$$

לכן

$$.\mathscr{L}\left[f\right](s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-ns}}{s}=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^n=\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})},\qquad s>0$$

השתמשנו בנוסחת הסכום אינסופי של טור הנדסי.

החשיבות של הפונקציה $u_c(t)$ בהתמרת לפלס נובעת לא מן הדוגמאות הקודמות אלא דווקא מן הנוסחה הבאה.

משפט 4.5: תהי f פונקציה כך ש־$\mathscr{L}\left[f\right](s)$ מוגדר לכל $s>a$, ויהי $c>0$. אזי

$$\mathscr{L}\left[u_c(t)f(t-c)\right](s)=e^{-cs}\mathscr{L}\left[f\right](s),\qquad s>a$$

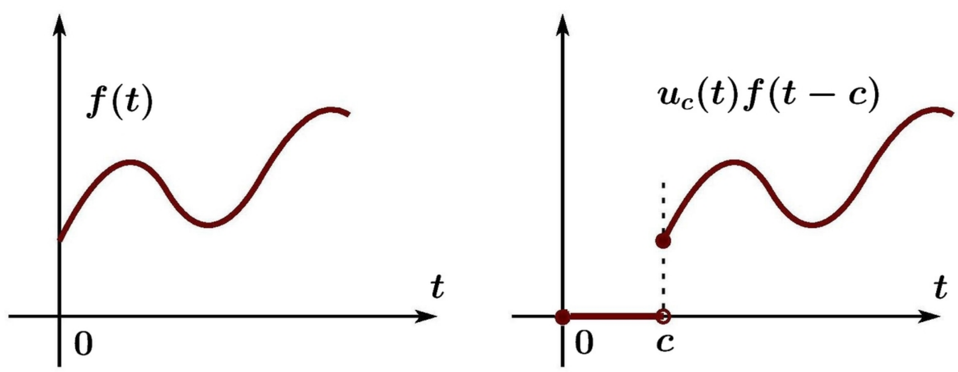
הוכחה:

$$\mathscr{L}\left[u_c(t)f(t-c)\right](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt=\int_c^{\infty}e^{-st}f(t-c)\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-s(c+v)}f(v)\,dv=e^{-cs}\int_0^{\infty}e^{-sv}f(v)\,dv=e^{-cs}\mathscr{L}\left[f\right](s)$$

■

בציור 4.1 רואים את היחס שבין הגרף של $f(t)$ והגרף של $u_c(t)f(t-c)$. הגרף של $u_c(t)f(t-c)$ הוא הזזה ימינה ב־c יחידות של הגרף של $f(t)$, תוך איפוס הפונקציה בקטע $[0,c)$.



איור 4.1: פעולת הזזה של פונקציה

נשתמש גם בנוסחה ההפוכה לזו שבמשפט. כלומר,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-cs}\mathscr{L}\left[f\right](s)\right](t) = u_c(t)f(t-c) \tag{4.6}$$

דוגמה 14: תהי $f(t) = t^2$. נחשב את $\mathscr{L}\left[u_1(t)f(t-1)\right]$. לפני כן, נעיר כי הפונקציה $u_1(t)f(t-1)$ אינה זהה לפונקציה $(t-1)^2$, או לפונקציה t^2 עבור $t \geq 1$. באופן מדויק נוכל לרשום

$$u_1(t)f(t-1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}.$$

על סמך משפט 4.5

$$\mathscr{L}\left[u_1(t)f(t-1)\right](s) = e^{-s}\mathscr{L}\left[f\right](s) = \frac{2e^{-s}}{s^3}$$

דוגמה 15: תהי

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t^2, & 2 \leq t \end{cases}$$

נחשב את $\mathscr{L}\left[f\right]$. אפשר לעשות זאת על ידי שימוש ישיר בהגדרה

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \int_2^{\infty} e^{-st}t^2\,dt.$$

החישוב של האינטגרל כרוך בשימוש כפול באינטגרציה לפי חלקים. קל יותר לעשות זאת על ידי שימוש בנוסחאות ידועות. לשם כך, נחפש פונקציה g כך ש־

$$f(t) = u_2(t)g(t-2).$$

לכל $t \geq 2$, על הפונקציה g לקיים את השוויון

$$t^2 = f(t) = g(t-2)$$

על ידי הצבת $v = t-2$ נקבל כי $g(v) = (v+2)^2$, ולכן

$$g(t) = (t+2)^2 = t^2 + 4t + 4.$$

נשתמש במשפט 4.5 ונקבל

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f\right](s) &= \mathscr{L}\left[u_2(t)g(t-2)\right](s) = e^{-2s}\mathscr{L}\left[g(t)\right](s)\\ &= e^{-2s}\mathscr{L}\left[t^2+4t+4\right](s) = e^{-2s}\left[\tfrac{2}{s^3}+\tfrac{4}{s^2}+\tfrac{4}{s}\right]\end{aligned}$$

דוגמה 16: תהי

$$f(t)=\begin{cases}5, & 0\le t<1\\ t+4, & 1\le t<2\\ 4t-2, & 2\le t\end{cases}$$

נחשב את $\mathscr{L}\left[f\right]$. לפני כן, נעיר כי $\mathscr{L}\left[f\right]$ אינה סכום רגיל של ההתמרות לפלס של הפונקציות 5, $t+4$, ו־$4t-2$. כמו בדוגמא הקודמת, אפשר לחשב את $\mathscr{L}\left[f\right]$ על ידי שימוש ישיר בהגדרה

$$\mathscr{L}\left[f\right](s)=\int_0^1 e^{-st}5\,dt+\int_1^2 e^{-st}(t+4)\,dt+\int_2^\infty e^{-st}(4t-2)\,dt.$$

אך יותר פשוט יהיה לרשום את f בצורה

$$f(t)=g_0(t)+u_1(t)g_1(t-1)+u_2(t)g_2(t-2)$$

כאשר g_0, g_1, ו־g_2 הן פונקציות אלמנטריות, ואז נוכל להשתמש בנוסחה שבמשפט 4.5. ראשית כל נמצא את הפונקציות g_0, g_1, ו־g_2. בקטע $[0,1)$ מתקיים השוויון

$$5=f(t)=g_0(t)$$

לכן נקח $g_0(t)=5$, לכל $t\ge 0$. בקטע $[1,2)$ צריך להתקיים השוויון

$$t+4=f(t)=5+g_1(t-1)$$

ולכן $g_1(t-1)=t-1$. מכאן $g_1(t)=t$, לכל $t\ge 0$. בקטע $[2,\infty)$ מתקיים השוויון

$$4t-2=f(t)=5+(t-1)+g_2(t-2)$$

ולכן $g_2(t-2) = 3t-6$. מכאן $g_2(t) = 3t$, לכל $t \geq 0$. עכשיו

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f](s) &= \mathscr{L}[g_0](s) + e^{-s}\mathscr{L}[g_1](s) + e^{-2s}\mathscr{L}[g_2](s)\\ &= \frac{5}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{3e^{-2s}}{s^2}\end{aligned}$$

אחד מן השימושים של משפט 4.5 הוא בפתרון משוואות דיפרנציאליות בהן מופיעה פונקציה בעלת מספר נקודות אי-רציפות, כפי שנראה בדוגמא הבאה.

דוגמה 17: נפתור את המשוואה

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = h(t), & t > 0\\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

כאשר

$$.h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi\\ 0, & t \notin [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

ברור ש- $h = u_\pi - u_{2\pi}$, ולכן

$$\mathscr{L}[y'' + y'](s) = \mathscr{L}[u_\pi - u_{2\pi}](s)$$

על ידי חישובים קלים נקבל

$$(s^2+s)\mathscr{L}[y](s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}$$

ולכן

$$.\mathscr{L}[y](s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}$$

אזי

$$.y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t) - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t)$$

על פי נוסחה (4.6)

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t) = u_\pi(t)g(t-\pi)$$

כאשר

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right](t)$$

ובאותו אופן

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t) = u_{2\pi}(t)g(t-2\pi).$$

נותר לנו למצוא את g. נפרק את השבר $\frac{1}{s^2(s+1)}$ לסכום של שברים פשוטים

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

על ידי שימוש בנוסחאות 1, 2, ו־6 שבטבלת התמרות לפלס, בהתאמה, נקבל

$$g(t) = e^{-t} - 1 + t$$

ולכן

$$y(t) = u_\pi(t)\left[e^{-(t-\pi)} - 1 + (t-\pi)\right] - u_{2\pi}(t)\left[e^{-(t-2\pi)} - 1 + (t-2\pi)\right].$$

הערה: יש לשים לב לכך ש־$y(t) \equiv 0$ בקטע $[0,\pi]$. עובדה זו עקבית עם העובדה שהמשוואה הדיפרנציאלית היא הומוגנית בקטע זה וגם תנאי ההתחלה הומוגניים. מצד שני, בקטע $[2\pi,\infty)$, $y(t) \not\equiv 0$, למרות העובדה שגם בקטע זה המשוואה הומוגנית (למה?).

4.4.2 פונקצית דלתא של דירק (Dirac)

הפונקציה שברצוננו להציג עכשיו אינה למעשה פונקציה במובן הרגיל של המילה, אלא "פונקציה" במובן יותר רחב ומסובך להגדרה. אין בידנו את הכלים המתמטיים הנחוצים בכדי להגדיר באופן מדויק את המובן היותר רחב של מושג הפונקציה[1], ולכן נאלץ להסתפק בהסברים לא מספיק מדויקים למהי פונקצית הדלתא של דירק. היא נקראת על שמו של המתמטיקאי האנגלי Paul Dirac (1902-1984) אשר הגדיר אותה במסגרת עבודתו בפיזיקה קוואנטית.

פונקצית הדלתא של דירק או, כפי שהיא נקראת לפעמים, **פונקצית האימפולס** בנקודה a מסומנת על ידי δ_a. במקרה המיוחד של הנקודה $a=0$, הפונקציה מסומנת לפעמים בקיצור על ידי δ (במקום δ_0). תיכף נראה כי δ_a היא הזזה של δ ב־a יחידות, ולכן $\delta_a(t) = \delta(t-a)$. נתחיל ב"הגדרה" של δ_a.

[1] למי שמעוניין, פרופ מיכאל צוויקל הכין בזמנו מאמר קצר ומדויק המתאר מהן פונקציות מוכללות (Distributions).

הגדרה: יהי a מספר ממשי נתון. ה"פונקציה" δ_a המקיימת

$$\int_A f(t)\delta_a(t)\,dt = f(a)$$

עבור כל פונקציה רציפה f בסביבת a, ועבור כל קבוצה A, הכוללת בתוכה סביבה של a, נקראת **פונקצית הדלתא של דירק** בנקודה a.

לא קשה להוכיח כי לא קיימת שום פונקציה רגילה המקיימת תנאי זה לכל f שרציפה בנקודה $x = a$. δ_a אינה קיימת כפונקציה רגילה אלא כפונקציה הפועלת על פונקציות. אחת מן הדרכים המקובלות לתאר את δ_a היא כגבול של תהליך. לכל $c > 0$, נגדיר פונקציה

$$\sigma_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, & a - c < t < a + c \\ 0, & t \notin (a - c, a + c) \end{cases}$$

קל לראות כי לפונקציות σ_c יש את התכונות הבאות:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_c(t)\,dt = 1$
2. $\sigma_c(t) \geq 0$, לכל $t \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\lim_{c\to 0+} \sigma_c(t) = 0$, לכל $t \neq a$

את הפונקציה δ_a נוכל להבין כאילו היתה שווה לגבול "$\lim_{c\to 0+} \sigma_c(t)$". שוב, הגבול האחרון אינו קיים במובן הרגיל מאחר ובנקודה $t = a$ הגבול אינו קיים. "נבדוק" את התכונה של δ_a. תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה a, ותהי $A = \mathbb{R}$. אזי

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_a(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\lim_{c\to 0+} \sigma_c(t)\right] dt = \lim_{c\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma_c(t)\,dt \\ &= \lim_{c\to 0+} \frac{1}{2c} \int_{a-c}^{a+c} f(t)\,dt = \lim_{c\to 0+} \frac{1}{2c}[2cf(t_c)] = f(a) \end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו במשפט ערך הביניים האינטגרלי, אשר ממנו נובע שלכל $c > 0$ קיימת נקודה $a - c < t_c < a + c$ כך ש־

$$\int_{a-c}^{a+c} f(t)\,dt = 2cf(t_c)$$

וברור שכאשר c שואף לאפס, t_c שואף ל־a. נחזור ונציין שוב כי "ההוכחה" הנ"ל אינה נכונה.

מה"הגדרה" נובע כי

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_a(s)\,ds = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} = u_a(t)$$

ולכן, במובן מסוים, נוכל לומר כי "$\delta_a(t) = u_a'(t)$". נוכל גם לחשב את ההתמרת לפלס של δ_a, לכל $a > 0$:

$$.\mathscr{L}\left[\delta_a\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)\,dt = e^{-as}$$

לא נגדיר את ההתמרת לפלס של δ_0. לפונקציה δ_a נודעת חשיבות רבה בתורת הסיגנלים ובהקשר למשוואות הדיפרנציאליות הנוגעות לכך. נביא דוגמא פשוטה.

דוגמה 18: נמצא פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \delta_\pi(t), & t > 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$(s^2 + 2s + 2)\mathscr{L}\left[y\right] = e^{-\pi s}$$

ולכן

$$.y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}\right](t)$$

על פי משפט (4.5) (ראה נוסחה (4.6))

$$y(t) = u_\pi(t)g(t - \pi)$$

כאשר

$$.g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right](t) = e^{-t}\sin t$$

לכן

$$.y(t) = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t - \pi)$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le T\\ 0, & t>T\end{cases}$ **ב.** $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 1\\ (t-1)^2, & t>1\end{cases}$

ג. $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t<2\\ 4t, & t\ge 2\end{cases}$ **ד.** $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 7\\ 3-t, & 7<t<8\\ 1, & 8\le t\end{cases}$

2. חשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות.

א. $\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}$ **ב.** $\dfrac{e^{-16s}}{s(s^2+2s+4)}$

3. הוכח כי

$$\mathscr{L}\left[\cos t\ln t\,\delta_\pi(t)\right]=-e^{-\pi s}\ln\pi.$$

4. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''(t)+4y'(t)+7y(t)=u_1(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ב. $y''(t)+2y'(t)+3y(t)=\delta_\pi(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ג. $y''(t)-2y'(t)+y(t)=(-1)^{[t]},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$

ד. $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=\delta_\pi(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ה. $y''(t)+4y(t)=\delta_\pi(t)-\delta_{2\pi}(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$

ו. $y'''(t)-y(t)=h(t),\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y''(0)=1$

כאשר

$$h(t)=\begin{cases}1, & \pi\le t\le 2\pi\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}.$$

5. פתור את משוואת ההפרשים הבאה: $y'(t)+y(t-1)=t^2$, $t>0$, כאשר $y(t)=0$, לכל $t\le 0$.

הדרכה: השתמש בטורי חזקות.

4.5 קונבולוציה

עבור התמרת פוריה הוכחנו כי

$$.\mathcal{F}[f*g](\omega)=2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)$$

אותה הנוסחה נכונה גם עבור התמרת לפלס ללא ה־2π

$$\mathscr{L}\left[f*g\right](s)=\mathscr{L}\left[f\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[g\right](s)$$

אך ראשית כל עלינו להבין מהי קונבולוציה במקרה של התמרת לפלס. בפרק 3 הגדרנו

$$.(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-y)g(y)\,dy$$

בפרק הנוכחי, הפונקציות שלנו אינן מוגדרות בקטע $(-\infty,0)$. בכדי שנוכל להשתמש בהגדרה זו, נרחיב את תחום ההגדרה שלהן גם לקטע $(-\infty,0)$ כך שהן יהיו שוות לאפס בקטע זה. לכן נוכל לרשום

$$.(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-y)g(y)\,dy$$

בגלל ש־$g(y)=0$ לכל $y<0$ ו־$f(t-y)=0$ לכל $t<y$, נקבל ש־

$$.(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-y)g(y)\,dy=\begin{cases}0, & t<0\\ \int_0^t f(t-y)g(y)\,dy, & t\geq 0\end{cases}$$

זוהי הסיבה לכך שעבור f ו־g המוגדרות בקטע $[0,\infty)$, אנו מגדירים

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy,\qquad t\geq 0$$

לכל t אשר עבורו קיים האינטגרל. על ידי הצבה פשוטה, קל לראות כי לכל t מתקיים השוויון

$$.(f*g)(t)=(g*f)(t)$$

משפט 4.6: אם קיימים קבועים a, K_1, ו־K_2 כך ש־$|f(t)| \le K_1 e^{at}$ ו־$|g(t)| \le K_2 e^{at}$, לכל $t \ge 0$, אזי

$$|(f*g)(t)| \le K_1 K_2 t e^{at}, \qquad t \ge 0$$

ומתקיים השוויון

$$\mathscr{L}\left[f*g\right](s) = \mathscr{L}\left[f\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[g\right](s), \qquad s>a.$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|(f*g)(t)| &= \left|\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\right| \le \int_0^t |f(t-y)|\cdot|g(y)|\,dy \\
&\le \int_0^t K_1 e^{a(t-y)} K_2 e^{ay} dy \le K_1K_2 e^{at}\int_0^t dy = K_1K_2 t e^{at}
\end{aligned}$$

מכך נובע ש־$e^{-st}(f*g)(t)$ אינטגרבילית בהחלט לכל $s>a$, ולכן ההתמרת לפלס של $f*g$ קיימת לכל $s>a$. על פי הנתונים, הפונקציות $e^{-st}f(t)$ ו־$e^{-st}g(t)$ אינטגרביליות בהחלט בקטע $[0,\infty)$, לכל $s>a$. לכן

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f*g\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\right)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-s(t-y)}f(t-y)e^{-sy}g(y)\,dy\right)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-s(t-y)}f(t-y)e^{-sy}g(y)\,dt\right)dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-s(t-y)}f(t-y)\,dt\right)e^{-sy}g(y)\,dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\right)e^{-sy}g(y)\,dy \\
&= \mathscr{L}\left[f\right](s)\int_0^\infty e^{-sy}g(y)\,dy = \mathscr{L}\left[f\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[g\right](s)
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

מסקנה מיידית חשובה ושימושית למשפט זה היא שאם $F=\mathscr{L}\left[f\right]$ ו־$G=\mathscr{L}\left[g\right]$ אזי

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right](t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)\,dy. \tag{4.7}$$

נדגים כעת כמה שימושים קלים של משפט 4.6 ונוסחה (4.7).

דוגמה 19: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$. נגדיר

$$\varphi(t)=\int_0^t f(y)\,dy$$

נבטא את $\mathscr{L}[\varphi]$ באמצעות $\mathscr{L}[f]$. נעשה זאת בשתי שיטות.

שיטה 1: ניתן לבדוק ש־ $\varphi(t)=(f*g)(t)$, כאשר $g(t)\equiv 1$. לכן

$$\mathscr{L}[\varphi](s)=\mathscr{L}[f*g](s)=\mathscr{L}[f](s)\cdot\mathscr{L}[g](s)=\frac{\mathscr{L}[f](s)}{s}.$$

שיטה 2: מאחר ו־ $\varphi(0)=0$ ו־ $\varphi'(t)=f(t)$, נוכל להשתמש בנוסחת הנגזרת

$$\mathscr{L}[f](s)=\mathscr{L}[\varphi'](s)=s\mathscr{L}[\varphi]-\varphi(0)=s\mathscr{L}[\varphi](s)$$

ולכן נקבל שוב

$$\mathscr{L}[\varphi](s)=\frac{\mathscr{L}[f](s)}{s}.$$

דוגמה 20: תהי $F(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$, כאשר $a>0$. נחשב את $\mathscr{L}^{-1}[F]$ בשתי שיטות.

שיטה 1: נוכל לרשום $F(s)=G(s)H(s)$, כאשר $G(s)=\frac{1}{s^2}$ ו־ $H(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$. על פי נוסחה 6 שבטבלת התמרות לפלס $\mathscr{L}^{-1}[G](t)=t$, ולפי נוסחה 4, $\mathscr{L}^{-1}[H](t)=\sin at$. לכן ממשפט 4.6 (נוסחה (4.7)) נקבל

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=\int_0^t (t-y)\sin ay\,dy.$$

חישוב שיגרתי של האינטגרל נותן את התוצאה

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=\frac{t}{a}-\frac{\sin at}{a^2}.$$

שיטה 2:

$$F(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}=\frac{1/a}{s^2}-\frac{1/a}{s^2+a^2}$$

ולכן

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=\frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t)-\frac{1}{a^2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](t)=\frac{t}{a}-\frac{\sin at}{a^2}.$$

דוגמה 21: נמצא פונקציה f המקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_0^t f(t-u)f(u)\,du = te^{-at}, \qquad t \geq 0 .$$

על סמך נוסחה (4.7), אם נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים נקבל

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) \cdot \mathscr{L}\left[f\right](s) = \frac{1}{(s-a)^2} .$$

לכן $\mathscr{L}\left[f\right](s) = \pm\frac{1}{s-a}$, אזי $f(t) = \pm e^{at}$.

דוגמה 22: נפתור את המשוואה האינטגרלית

$$g(t) + \int_0^t g(u)e^{-(t-u)}du = 1, \qquad t \geq 0 .$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים

$$\mathscr{L}\left[g\right](s) + \mathscr{L}\left[g(t) * e^{-t}\right](s) = \mathscr{L}\left[1\right](s)$$

ולכן

$$\mathscr{L}\left[g\right](s) + \mathscr{L}\left[g\right](s) \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} .$$

נחלץ את $\mathscr{L}\left[g\right]$ ונקבל

$$\mathscr{L}\left[g\right](s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} .$$

הפתרון למשוואה הוא לכן $g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$.

על סמך פעולת הקונבולוציה, נוכל להציג כעת שיטה כללית למציאת הפתרון של כל משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר שני עם מקדמים קבועים בקטע $[0,\infty)$, עם תנאי התחלה בנקודה $t=0$. הצורה הכללית של הבעייה היא

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

כאשר a, b, c, y_0, ו־y_1 הם קבועים ממשיים, $a \neq 0$, ו־$h(t)$ היא פונקציה נתונה בקטע $[0,\infty)$. בסעיף 4.3 מצאנו שיטה כללית לפתרון המשוואה ההומוגנית. בכדי להשלים את

התמונה יספיק לנו לפתור את המשוואה הלא־הומוגנית

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t), & t > 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

אם נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה נקבל

$$(as^2 + bs + c)\mathscr{L}\left[y\right](s) = H(s)$$

כאשר $H(s) = \mathscr{L}\left[h\right](s)$. לכן

$$\mathscr{L}\left[y\right](s) = \frac{H(s)}{as^2 + bs + c}.$$

נסמן

$$F(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}.$$

על ידי השיטות של סעיף 4.3 נוכל לחשב את

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F\right](t).$$

הפתרון לבעייה לכן נתון על ידי

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[H(s)F(s)\right](t) = \int_0^t f(t-y)h(y)\,dy.$$

ברור כי אין צורך לחשב את $H(s)$.

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס של הפונקציה

$$f(t) = \int_0^t (u^2 - u + e^{-u})\,du.$$

2. פתור את כל אחת מהמשוואות האינטגרליות הבאות.

א. $f(t) + 2\int_0^t f(u)\cos(t-u)\,du = 9e^{2t}$

ב. $a > 0 \;, \int_0^t f(u)\,du - f'(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le a \\ 1, & a \le t \end{cases}$

ג. $f(t) + \int_0^t (t-u) f(u)\,du = \sin 2t$

ד. $f'(0) = 1 \;, f(0) = -1 \;, f''(t) = \int_0^t u f(t-u)\,du$

ה. $f(t) + \int_0^t f(u) e^{-(t-u)} du = 1$

ו. $f'(0) > 0 \;, f(0) = 0 \;, \int_0^t f'(u) f(t-u)\,du = 3te^{3t} - e^{3t} + 1$

ז. $f(0) = 2 \;, 3f'(t) - 10f(t) + 3\int_0^t f(u)\,du = 10\sin t - 5$

ח. $\int_0^t f(u) f(t-u)\,du = 2f(t) + t - 2$, האם הפתרון הוא יחיד?

ט. $f(0) = 1 \;, f'(t) + \int_0^t f(u)\,du = \sin t$

י. $f'(0) = 1 \;, f(0) = \frac{1}{a} \;, \int_0^t f''(t) f(t-u)\,du = te^{at}$

יא. $f(t) = at + \int_0^t f(u)\sin(t-u)\,du$

יב. $f(0) = 2 \;, f'(t) + 5\int_0^t f(u)\cos 2(t-u)\,du = 10$

יג. $f(0) = 0 \;, \int_0^t f'(u) f(t-u)\,du = 24t^3$

3. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''(t) + y(t) = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

כאשר

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t \end{cases}$$

ב. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = f(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

כאשר

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 2\pi \\ \sin t, & t > 2\pi \end{cases}$$

ג. $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = \delta_\pi(t) + \sin t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

ד. $y''(t) + y(t) = \delta_\pi(t)\cos t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

ה. $y'''(t) - y''(t) + 4y'(t) - 4y(t) = 68e^{x}\sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -19$, $y''(0) = -37$

ו. $y''(t) + 9y(t) = f_c(t)$, $\quad y(0) = a$, $\quad y'(0) = b$

כאשר עבור $c > 0$,

$$f_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le c \\ t - c, & c < t \end{cases}$$

4. תהי $y_1(t)$ פתרון של הבעייה

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f_1(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (t \ge 0)$$

ותהי $y_2(t)$ פתרון של הבעייה

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f_2(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (t \ge 0)$$

כאשר נתון ש־$f_1(t) \le f_2(t)$, לכל $t \ge 0$, ושהפונקציות f_1 ו־f_2 רציפות וחסומות בקטע $[0, \infty)$. הוכח כי $y_1(t) \le y_2(t)$ עבור כל $t \ge 0$.

4.6 דוגמאות ושימושים נוספים

בסעיף זה נביא כמה דוגמאות ושימושים נוספים של התמרת לפלס. הסעיפים שבאים לאחר סעיף זה אינם תלויים בו ולכן ניתן לדלג עליו.

דוגמה 23: נחשב את ההתמרה לפלס של $f(t) = t^p$, $t \ge 0$, $p > -1$. קל לראות שלכל $p > -1$, $\mathscr{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > 0$. נציב $u = st$ ($s > 0$) ונקבל

$$\mathscr{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^p dt = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^p \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^p du.$$

הערך של $\int_0^\infty e^{-u}u^p du$ הוא בלתי תלוי ב־s, והוא למעשה פונקציה של p הנקראת **פונקצית גמא (Gamma)**. ההגדרה המקובלת של פונקצית גמא היא

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du, \qquad p > 0$$

ולכן נוכל לומר לסיכום כי

$$\mathscr{L}[t^p](s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0, \quad p > -1.$$

הבעייה היחידה היא שאיננו יודעים למה שווה $\Gamma(p+1)$. תוצאה זו כוללת בתוכה את התוצאה הקודמת שקבלנו בדוגמא 6

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](s)=\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s>0, \quad n\in\mathbb{Z}_+ .$$

משתי התוצאות האלה נובע כי $\Gamma(n+1)=n!$, לכל $n\in\mathbb{Z}_+$. עובדה זו נובעת גם מהגדרת הפונקציה Γ ואינטגרציה לפי חלקים והיא גם נובעת מהתכונות של פונקצית גמא שנציג כעת.

4.6.1 תכונות של פונקצית גמא

1. לכל $p>0$, $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$.

הוכחה: עבור $p>0$

$$\begin{aligned}
\Gamma(p+1) &= \int_0^\infty e^{-u}u^p du\\
&= -e^{-u}u^p\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left(-e^{-u}\right)\left(pu^{p-1}\right)du\\
&= p\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du\\
&= p\Gamma(p)
\end{aligned}$$
■

2. $\Gamma(1)=1$.

הוכחה:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-u}du=-e^{-u}\Big|_0^\infty=1$$
■

3. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

הוכחה:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du$$

נציב $v=u^{\frac{1}{2}}$. נקבל $dv=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$, ולכן

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-v^2}dv=\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv .$$

בפרק 3 (ראה תרגיל 2) ראינו שהאינטגרל האחרון שווה $\sqrt{\pi}$, ולכן $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. ■

מתכונות 1 ו־3 נובע ש־

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi},\qquad n\in\mathbb{N}$$

ולכן

$$.\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}},\qquad \mathscr{L}\left[\sqrt{t}\right](s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}},\qquad \dots$$

דוגמה 24: פונקצית בטא (Beta) מוגדרת על ידי

$$.\mathcal{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\qquad p,q>0$$

נחשב את $\mathcal{B}(p,q)$ עבור כל $p,q>0$, על ידי שימוש בהתמרת לפלס. נגדיר

$$.g(t)=\int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}dx$$

ברור כי $g(1)=\mathcal{B}(p,q)$, וכי $g(t)$ היא הקונבולוציה של הפונקציות $f(t)=t^{p-1}$ ו־ $h(t)=t^{q-1}$. לכן

$$\mathscr{L}[g](s)=\mathscr{L}[f](s)\cdot\mathscr{L}[h](s)=\frac{\Gamma(p)}{s^p}\cdot\frac{\Gamma(q)}{s^q}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}$$

ולכן

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}\right](t)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}}\right](t)\\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}t^{p+q-1}\end{aligned}$$

אזי

$$\int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}t^{p+q-1}$$

ובפרט

$$.\mathcal{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

דוגמה 25: בתוך הוכחת משפט 3.3 חשבנו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. נציג עוד שיטה לחישוב אינטגרל זה. לכל $t>0$ נגדיר

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx$$

ברור כי האינטגרל שלנו שווה ל־ $f(1)$. (על ידי ההצבה $u = tx$ אפשר לראות כי למעשה f היא פונקציה קבועה, אך אין זה מענייננו.)

$$\mathscr{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx\right)dt.$$

נחליף את סדר האינטגרציה (זה אפשרי כאן) ונקבל

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f](s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\sin tx\,dt\right)\frac{dx}{x}\\ &= \int_0^\infty \frac{x}{s^2+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש־ $\mathscr{L}[\sin tx](s) = \frac{x}{s^2+x^2}$. על ידי ההצבה $su = x$ נקבל

$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{s}\arctan u\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2s}.$$

לכן

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{2s}\right] = \frac{\pi}{2}$$

ובפרט $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

דוגמה 26: האינטגרלים $\int_0^\infty \cos u^2\,du$ ו־ $\int_0^\infty \sin u^2\,du$ נקראים אינטגרלים של פרנל (Fresnel). אנו נחשב את האינטגרלים $\int_0^\infty \cos u^2\,du$ ו־ $\int_0^\infty \sin u^2\,du$. נוכיח כי $\int_0^\infty \cos u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, ובאותה שיטה ניתן להוכיח כי $\int_0^\infty \sin u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. נגדיר

$$f(t) = \int_0^\infty \cos tu^2\,du.$$

אזי עבור $s > 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty \cos tu^2\,du\right)dt\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tu^2\,dt\right)du = \int_0^\infty \frac{s}{s^2+u^4}\,du\end{aligned}$$

ניתן להצדיק את החלפת סדר האינטגרציה, והתוצאה הסופית נובעת מן העובדה ש־

$$\mathscr{L}\left[\cos tu^2\right](s) = \frac{s}{s^2+(u^2)^2}.$$

נציב $x=\frac{u}{\sqrt{s}}$, $s>0$, ונקבל

$$\mathscr{L}\left[f\right](s)=\int_0^\infty \frac{s}{s^2+s^2x^4}\sqrt{s}\,dx=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

על ידי שיטת השברים החלקיים של החשבון האינטגרלי, או על ידי שימוש במשפט הרזידואום של הפונקציות המרוכבות (ראה הסעיפים הבאים), ניתן להגיע ל־

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

לכן $\mathscr{L}\left[f\right](s)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{s}}$. ראינו כבר כי $\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$, ולכן

$$f(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

ומזה נקבל מייד כי

$$\int_0^\infty \cos u^2\,du=f(1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$

תרגילים

1. פתור את כל אחת מהמשוואות האינטגרליות הבאות.

א. $\displaystyle\int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}}\,du=1+t+t^2$

ב. $\displaystyle\int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt[3]{t-u}}\,du=t(1+t)$

2. הוכח שלכל $p,q>0$,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta=\mathcal{B}(p,q).$$

3. חשב את האינטגרלים

א. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-2x^2}dx$

ב. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt[4]{x}e^{-\sqrt{x}}dx$

4. הוכח שלכל $p>0$, $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx=\Gamma(p)$.

5. הוכח שלכל $p, q > -1$, $\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}}$.

6. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$ ב. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$

7. **פונקציית זטא** של רימן מוגדרת לכל $p > 1$ על ידי

$$\zeta(p) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots.$$

הוכח כי

$$\zeta(p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

4.7 נוסחת ההתמרה ההפוכה

בסעיף 3.4 הצגנו נוסחה סגורה עבור ההתמרה ההפוכה להתמרת פוריה. בסעיף זה, ברצוננו לתת נוסחה דומה עבור התמרת לפלס ההפוכה, אלא שכאן העניין הוא יותר מסובך. בכדי לקבל את הנוסחה להתמרת לפלס הפוכה, יהיה עלינו להכליל את ההגדרה של התמרת לפלס כך ש־$\mathscr{L}[f](\sigma)$ תהיה מוגדרת עבור ערכים מרוכבים $\sigma \in \mathbb{C}$.

יהי $\sigma = s + iv$ מספר מרוכב כלשהו, כאשר $s = \mathrm{Re}(\sigma)$ ו־$v = \mathrm{Im}(\sigma)$. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין, המוגדרת בקטע $[0,\infty)$ והמקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$. נגדיר

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, dt$$

לכל σ אשר עבורו האינטגרל מתכנס. אם $s = \sigma$ אז $F(\sigma) = F(s) = \mathscr{L}[f](s)$.

טענה 4.7: יהי $a \in \mathbb{R}$. אם $e^{-at} f(t)$ רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט בקטע $[0,\infty)$, אזי $F(\sigma)$ מוגדרת לכל $\sigma \in \mathbb{C}$ כך ש־$\mathrm{Re}(\sigma) \geq a$.

הוכחה: יהי $s = \mathrm{Re}(\sigma) \geq a$. אזי

$$\left|e^{-\sigma t}\right| = \left|e^{-(s+iv)t}\right| = \left|e^{-st} e^{-ivt}\right| = e^{-st}.$$

לכן לכל $t \geq 0$

$$\left|e^{-\sigma t} f(t)\right| = e^{-st}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|$$

ו־$e^{-\sigma t} f(t)$ אינטגרבילית בהחלט. אזי $F(\sigma)$ מוגדרת. ∎

התוצאה הבאה אינה דרושה לנו בכדי לקבל את נוסחת ההתמרה ההפוכה אבל היא תוצאה חשובה בפני עצמה, אשר תסייע לנו בשימושים השונים שיש לנוסחת ההתמרה ההפוכה.

משפט 4.8: אם $e^{-at}f(t)$ רציפה למקוטען ואינטגרבילית בהחלט בקטע $[0,\infty)$ אזי $F(\sigma)$ **אנליטית** בחצי המישור המרוכב $\mathrm{Re}(\sigma)>a$.

הוכחה: ראשית כל נוכיח כי $F(\sigma)$ רציפה בתחום $\mathrm{Re}(\sigma)>a$. תהי σ_n סדרה של נקודות בתחום המתכנסת לנקודה σ^* אשר גם היא שייכת לתחום. בכדי להוכיח את הרציפות, נוכיח כי $\lim_{n\to\infty}F(\sigma_n)=F(\sigma^*)$. על פי ההגדרה

$$|F(\sigma_n)-F(\sigma^*)|=\left|\int_0^\infty\left(e^{-\sigma_n t}-e^{-\sigma^* t}\right)f(t)\,dt\right|\le\int_0^\infty\left|e^{-\sigma_n t}-e^{-\sigma^* t}\right||f(t)|\,dt$$

ברור כי

$$\lim_{n\to\infty}\left|e^{-\sigma_n t}-e^{-\sigma^* t}\right|=0$$

לכל $t\ge 0$, משום ש־ $\lim_{n\to\infty}e^{-\sigma_n t}=e^{-\sigma^* t}$. אם נמצא פונקציה אינטגרבילית בהחלט g כך ש־

$$\left|e^{-\sigma_n t}-e^{-\sigma^* t}\right|\cdot|f(t)|\le g(t) \tag{4.8}$$

אז ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג (ראה משפט 3.2) נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left|e^{-\sigma_n t}-e^{-\sigma^* t}\right|\cdot|f(t)|\,dt=0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}[F(\sigma_n)-F(\sigma^*)]=0$. נתון לנו ש־ $\mathrm{Re}(\sigma_n),\mathrm{Re}(\sigma^*)=s^*>a$, ולכן

$$\left|e^{-\sigma_n t}-e^{-\sigma^* t}\right|\le\left|e^{-\sigma_n t}\right|+\left|e^{-\sigma^* t}\right|<2e^{-at}\,.$$

הפונקציה $g(t)=2e^{-at}|f(t)|$ אינטגרבילית בהחלט והיא מקיימת את נוסחה (4.8). לכן F רציפה בחצי המישור המרוכב $\mathrm{Re}(\sigma)>a$.

נוכיח עכשיו כי F אנליטית בתחום זה. לשם כך נשתמש במשפט קושי (Cauchy) ובמשפט מוררה (Morera) שנזכיר פה.

משפט: (קושי Cauchy) אם G היא פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר $\mathcal{D}$, אזי לכל עקום פשוט וסגור C בתוך התחום $\mathcal{D}$ מתקיים

$$\oint_C G(z)\,dz=0\,.$$

משפט: (מורֶרה Morera) אם F רציפה בתחום פשוט קשר $\mathcal{D}$, ואם לכל עקום פשוט קשר וסגור C בתוך $\mathcal{D}$ מתקיים

$$\oint_C F(z)\,dz = 0$$

אזי F אנליטית בתחום $\mathcal{D}$.

להוכחת שני משפטים אלה, ראה למשל את הספר

Complex Variables and Applications,
by R. V. Churchill, J. W. Brown, and R. F. Verhey.

או את חוברת פונקציות מרוכבות, שבה ניתן למצוא את ההוכחות לשני המשפטים בשפה העברית. התחום שלנו הוא $\mathrm{Re}(\sigma) > a$. יהי C עקום פשוט וסגור כלשהו בתחום זה. לפי הגדרת הפונקציה F

$$\oint_C F(\sigma)\,d\sigma = \oint_C \left(\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt\right) d\sigma\,.$$

מאחר ו־$e^{-\sigma t} f(t)$ אינטגרבלית בהחלט, נוכל להחליף את סדר האינטגרציה ולקבל

$$\oint_C F(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\infty \left(\oint_C e^{-\sigma t} d\sigma\right) f(t)\,dt\,.$$

הפונקציה $G(\sigma) = e^{-\sigma t}$ (כאשר t קבוע) היא פונקציה אנליטית במשתנה σ בכל $\mathbb{C}$, ולכן ממשפט קושי נובע

$$\oint_C e^{-\sigma t} d\sigma = 0$$

לכל t. לכן

$$\oint_C F(\sigma)\,d\sigma = 0\,.$$

מן העובדה ש־F רציפה בתחום וממשפט מוררה נובע כי F אנליטית בתחום $\mathrm{Re}(\sigma) > a$.
∎

הערה: פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר נקבעת לחלוטין על ידי הערכים שלה בקבוצה קטנה יחסית של נקודות. למשל, הפונקציה נקבעת לגמרי על ידי הערכים שהיא מקבלת בקטע כלשהו שנמצא בתחום. לכן אם $F(s) = \mathscr{L}[f](s)$, לכל $s > a$, אזי $F(\sigma)$ נקבעת לגמרי על ידי $\mathscr{L}[f](s)$. עובדה זו חשובה מאחר והיא מאפשרת לנו לקבל את $F(\sigma)$ באופן מיידי מ־$\mathscr{L}[f](s)$ בלי צורך בחישובים נוספים. למשל עבור $f(t) = 1$ ידוע

לנו כי $\mathscr{L}[f](s)=\frac{1}{s}$, $s>0$. לכן $F(\sigma)=\frac{1}{\sigma}$. באופן דומה, אם לכל $s>a$, ידוע לנו כי $F(s)=\frac{e^{-ds}}{s^2+bs+c}$, אז בהכרח $F(\sigma)=\frac{e^{-d\sigma}}{\sigma^2+b\sigma+c}$.

משפט 4.9: (נוסחת התמרת לפלס ההפוכה) נניח ש־ $e^{-at}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[0,\infty)$, ונניח כי $f(t)$ רציפה והנגזרות החד־צדדיות קיימות בכל נקודה t. תהי

$$F(\sigma)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}f(t)\,dt, \qquad \sigma\in\mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\sigma)>a.$$

אזי

$$f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma, \qquad t>0$$

עבור כל $s>a$.

הערה: האינטגרציה נעשית לאורך קו ישר מן הצורה

$$L_s=\left\{\sigma=s+iv\in\mathbb{C}\,\middle|\,-\infty<v<\infty\right\}$$

כך ש־ $s>a$. זהו קו ישר המקביל לציר המדומה של המישור המרוכב, הכלול בשלמותו בתוך התחום $\mathrm{Re}(\sigma)>a$, אשר בו F אנליטית. התוצאה של האינטגרציה, $f(t)$, תתקבל לכל בחירה שרירותית של $s>a$! הנוסחה הנ"ל נקראת לפעמים גם נוסחת האינטגרל של ברומיץ' (Bromwich).

נשים לב שבכדי לקבל את f מ־ $\mathscr{L}[f]$ עלינו לבצע שתי פעולות

א. להרחיב את $\mathscr{L}[f](s)$ ל־ $F(\sigma)$, לכל σ בתחום $\mathrm{Re}(\sigma)>a$.

ב. לחשב את האינטגרל של $\frac{1}{2\pi i}e^{\sigma t}F(\sigma)$ לאורכו של אחד מן הקווים L_s, עבור $s>a$. הבחירה של $s>a$ נתונה לשיקול דעתנו.

הוכחת משפט 4.9: נשתמש בהתמרת פוריה ובהתמרת פוריה ההפוכה. יהי $s>a$ ונניח שהוא קבוע לאורך כל הדיון. נגדיר את הפונקציה

$$G(v)=F(s+iv), \qquad v\in\mathbb{R}$$

כלומר

$$\begin{aligned} G(v) &= \int_0^\infty e^{-(s+iv)t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-ivt}\left[e^{-st}f(t)\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-ivt}g(t)\,dt \end{aligned}$$

כאשר

$$.g(t)=\begin{cases}2\pi e^{-st}f(t), & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

הפונקציה g רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט. לכן

$$.G(v)=\mathcal{F}[g](v)$$

כמו־כן, הנגזרות החד־צדדיות של g קיימות בכל נקודה $t\neq 0$, ולכן על פי משפט התמרת פוריה ההפוכה (משפט 3.3)

$$.g(t)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}e^{ivt}\mathcal{F}[g](v)\,dv=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}e^{ivt}G(v)\,dv,\qquad t\neq 0$$

לכל $t>0$ אנו מקבלים

$$2\pi e^{-st}f(t)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}e^{ivt}F(s+iv)\,dv$$

ולכן

$$.f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}e^{(s+iv)t}F(s+iv)\,dv$$

האינטגרציה כאן היא לפי v לאורך $\mathbb{R}$. נציב $\sigma=s+iv$, ונקבל $v=\frac{\sigma-s}{i}$, ו־$dv=\frac{d\sigma}{i}$. לכן

$$.f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma \qquad \blacksquare$$

בנקודה $t=0$, האינטגרל ישאף ל־$f(0+)/2$.

4.8 שימוש בנוסחת ההתמרה ההפוכה

בהשוואה לשימוש בנוסחת התמרת פוריה ההפוכה, השימוש בנוסחה התמרת לפלס ההפוכה הוא פחות נוח. החישוב של האינטגרל $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma$ עשוי להיות מסובך במקרים רבים. אנו נציג בסעיף זה את אחת השיטות הטבעיות והפשוטות לחישוב אינטגרלים מסוג זה. השיטה מבוססת על משפט הרזידואום.

משפט: (משפט הרזידואום) אם C הוא עקום סגור ופשוט ו־g פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר הכולל בתוכו את C חוץ אולי ממספר סופי של נקודות $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ בתוך (ולא על) C, אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\{g;\sigma_j\}.$$

הרזידואום של g בנקודה σ_j הוא המקדם של $(z-\sigma_j)^{-1}$ בפיתוח g לטור לורן (Laurent) סביב לנקודה σ_j. אם ל־g יש קוטב (pole) מסדר m בנקודה σ_j אזי

$$\operatorname{Res}\{g;\sigma_j\} = \lim_{\sigma\to\sigma_j} \frac{d^{m-1}}{d\sigma^{m-1}}\left[\frac{(\sigma-\sigma_j)^m g(\sigma)}{(m-1)!}\right].$$

במקרה המיוחד בו $g(\sigma) = \frac{p(\sigma)}{q(\sigma)}$, כאשר $p(\sigma)$ ו־$q(\sigma)$ אנליטיות בסביבת σ_j, $p(\sigma_j)\neq 0$, $q(\sigma_j)=0$, ו־$q'(\sigma_j)\neq 0$, אזי ל־g יש קוטב פשוט (מסדר 1) בנקודה $\sigma=\sigma_j$ ו־

$$\operatorname{Res}\{g;\sigma_j\} = \frac{p(\sigma_j)}{q'(\sigma_j)}.$$

נחזור כעת לבעיית חישוב האינטגרל שבנוסחת ההתמרה ההפוכה. נניח ש־$F(\sigma)$ אנליטית בתחום $\operatorname{Re}(\sigma) > a$, ויהי $s > a$. אנו מעוניינים לחשב את

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma, \qquad t>0.$$

כאמור, לא קיימת שיטה אחת לחישוב אינטגרל זה עבור כל פונקציה $F(\sigma)$. בתנאים מסוימים על $F(\sigma)$ נוכל לחשב אותו. נניח ש־$F(\sigma)$ אנליטית בכל המישור מלבד מספר סופי של נקודות $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, ולפי ההנחה

$$\operatorname{Re}(\sigma_j) < a, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

יהי $s > a$ ויהי $R > 0$ מספר ממשי מספיק גדול כך שחצי המעגל השמאלי Γ_R אשר מרכזו בנקודה $(s,0)$ ורדיוסו R יכלול בתוכו את כל הנקודות $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. נחלק את העקום Γ_R לשני העקומים הבאים

$$\begin{aligned} I_R &= \left\{\sigma\in\mathbb{C} \,\middle|\, \sigma = s+iv, \quad -R<v<R\right\} \\ C_R &= \left\{\sigma\in\mathbb{C} \,\middle|\, |\sigma-s| = R, \quad \operatorname{Re}(\sigma)\le s\right\} \end{aligned}$$

כפי שרואים בציור 4.2. על סמך משפט הרזידואום

$$.\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left\{e^{\sigma t}F(\sigma);\sigma_j\right\}$$

האגף הימני אינו תלוי ב־R, כל עוד R מספיק גדול, ומאחר ש־ $\Gamma_R = C_R \cup I_R$, הרי ש־

$$.\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma$$

ברור כי

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{I_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma$$

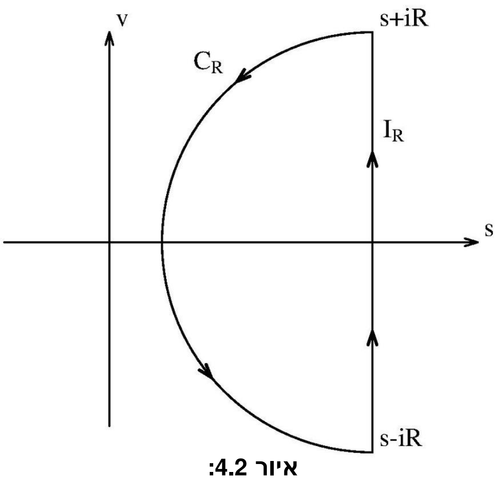
ולכן אם מתקיים

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{4.9}$$

אז נקבל את הנוסחה

$$.f(t) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left\{e^{\sigma t}F(\sigma);\sigma_j\right\}$$

לרוע המזל, שוויון (4.9) אינו מתקיים לכל F. ננסח תנאי מסוים אשר תחתיו F תקיים את (4.9).



איור 4.2:

משפט 4.10: תהי F פונקציה אנליטית במישור המרוכב, פרט אולי למספר סופי של נקודות. יהי C_R כנ"ל. אם

$$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|=0$$

אזי

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma=0$$

מתקיים לכל $t>0$.

לשם הוכחת המשפט נזדקק ללמה של ג'ורדן (Jordan's Lemma).

משפט: (הלמה של ג'ורדן)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta<\frac{\pi}{2R}$$

הוכחה: לכל $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מתקיים אי-השוויון

$$\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta\,.$$

סיבה לכך היא ש-$\frac{2\theta}{\pi}$ עבור $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ הוא קו ישר שמתחיל בנקודה $(0,0)$ ומסתיים בנקודה $(\frac{\pi}{2},1)$. גם לגרף של $\sin\theta$ בקטע זה אותן נקודות קצה, אך הגרף קעור בקטע, ולכן נמצא מעל הקו הנ"ל. מאי-שוויון זה נובע כי

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta &\le \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}d\theta=-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)<\frac{\pi}{2R}\end{aligned}$$

■

הוכחת משפט 4.10: העקום C_R נתון על ידי

$$\begin{aligned}C_R &= \left\{\sigma\in\mathbb{C}\,\middle|\,|\sigma-s|=R,\quad \mathrm{Re}(\sigma)\le s\right\}\\ &= \left\{\sigma\in\mathbb{C}\,\middle|\,\sigma=s+Re^{i\theta},\quad \tfrac{\pi}{2}\le\theta\le\tfrac{3\pi}{2}\right\}\end{aligned}$$

לכל $\sigma\in\mathbb{C}$,

$$\left|e^{\sigma t}\right|=\left|e^{(s+Re^{i\theta})t}\right|=e^{st}\left|e^{Rte^{i\theta}}\right|=e^{st}e^{Rt\cos\theta}=e^{st}e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}\,.$$

לכן

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\left|e^{\sigma t}\right||F(\sigma)|\,|d\sigma| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|\int_{C_R}\left|e^{\sigma t}\right||d\sigma| \\ &= \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{st}e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}R\,d\theta\end{aligned}$$

בשלב הסופי השתמשנו בעובדה ש־ $\sigma = s + Re^{i\theta}$ בכדי להסיק כי $d\sigma = iRe^{i\theta}d\theta$, ולכן $|d\sigma| = R\,d\theta$. לכן

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|Re^{st}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}\,d\theta .$$

על ידי ההצבה $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ נקבל כי

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}\,d\theta = \int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi}\,d\varphi .$$

הפונקציה $\sin\varphi$ היא פונקציה זוגית סביב הנקודה $\frac{\pi}{2}$. בנוסף $Rt > 0$ ולכן, מהלמה של ג'ורדן, נקבל

$$\int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi}\,d\varphi < \frac{\pi}{Rt} .$$

לכן, בשלב הנוכחי יש בידנו את אי-השוויון

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|\frac{\pi e^{st}}{t} .$$

מכאן שאם $\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)| = 0$, אזי

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = 0$$

מתקיים לכל $t > 0$. סיימנו את הוכחת המשפט. ∎

המסקנה המיידית ממשפט זה היא אם כן: אם F אנליטית בכל $\mathbb{C}$, פרט אולי למספר סופי של נקודות σ_1, σ_2, ..., σ_n, כך ש־ $\mathrm{Re}(\sigma_j) < s$, לכל $1 \le j \le n$, ואם

$$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)| = 0$$

אזי ההתמרת לפלס ההפוכה של $F(s)$ היא

$$f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left\{e^{\sigma t}F(\sigma);\sigma_j\right\} \tag{4.10}$$

דוגמה 27: נחשב את ההתמרה ההפוכה של $F(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}$ בשתי שיטות שונות. מאחר ו־

$$F(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

נקבל מייד מן הנוסחאות הידועות לנו כי

$$.f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)=e^{2t}-e^{t}$$

עתה נחשב את $f(t)$ באמצעות הנוסחה שקבלנו לעיל.

מן הערה שאחרי הוכחת משפט 4.8 נובע כי $F(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2-3\sigma+2}$, כאשר $\sigma\in\mathbb{C}$. ל־$F(\sigma)$ יש שני קטבים פשוטים $\sigma_1=1$ ו־$\sigma_2=2$ ולכן

$$f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{\sigma t}\frac{1}{\sigma^2-3\sigma+2}\,d\sigma$$

לכל $s>2$. נבחר למשל את $s=3$. לכן

$$.C_R=\left\{\sigma\in\mathbb{C}\,\middle|\,|\sigma-3|=R,\quad \operatorname{Re}(\sigma)\le 3\right\}$$

עלינו לבדוק ש־$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|=0$, לפני שנוכל להשתמש בתוצאה לעיל.

$$\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|=\max_{\sigma\in C_R}\left|\frac{1}{(\sigma-1)(\sigma-2)}\right|$$

וברור שאם $R=|\sigma-3|$ ישאף לאינסוף אז גם $|\sigma-1|$ ו־$|\sigma-2|$ ישאפו לאינסוף, ולכן

$$.\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}\frac{1}{|(\sigma-1)(\sigma-2)|}=0$$

אזי

$$\begin{aligned}
f(t)&=\lim_{M\to\infty}\tfrac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{\sigma t}\tfrac{1}{\sigma^2-3\sigma+2}\,d\sigma\\
&=\operatorname{Res}\left\{\tfrac{e^{\sigma t}}{(\sigma-1)(\sigma-2)};\sigma=1\right\}+\operatorname{Res}\left\{\tfrac{e^{\sigma t}}{(\sigma-1)(\sigma-2)};\sigma=2\right\}\\
&=\tfrac{e^{\sigma t}}{\sigma-2}\Big|_{\sigma=1}+\tfrac{e^{\sigma t}}{\sigma-1}\Big|_{\sigma=2}=\tfrac{e^{t}}{1-2}+\tfrac{e^{2t}}{2-1}=-e^{t}+e^{2t}
\end{aligned}$$

וקבלנו תוצאה זהה לזו שבשיטה הראשונה.

לפני שנראה דוגמאות נוספות, נביא עוד עובדה אחת חשובה.

משפט 4.11: אם $F(\sigma)=\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}$, כאשר P ו־Q פולינומים כך שמעלת P קטנה ממעלת Q, אזי

$$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|=0$$

כאשר $C_R=\left\{\sigma\in\mathbb{C}\,\middle|\,|\sigma-s|=R,\quad \mathrm{Re}(\sigma)\le s\right\}$ ו־s הוא מספר ממשי כלשהו.

הוכחה: נניח ש־$\deg(P)=m$ ו־$\deg(Q)=n$, ויהי $k=n-m>0$. לא קשה להוכיח שקיימים $M>0$ ו־$c>0$ כך שלכל $|\sigma|\ge M$ מתקיים

$$\left|\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}\right|\le\frac{c}{|\sigma|^k}.$$

לכן, לכל $R\ge|s|+M$ ולכל $\sigma\in C_R$ יתקיים $|\sigma|\ge M$ ולכן

$$|F(\sigma)|=\left|\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}\right|\le\frac{c}{|\sigma|^k}.$$

מכאן נובעת תוצאת המשפט. ∎

דוגמה 28: לגבי הפונקציה $u_c(t)$, $c>0$, הוכחנו כי

$$\mathscr{L}\left[u_c\right](s)=\frac{e^{-cs}}{s},\qquad s>0.$$

לכן אם נגדיר $F(s)=\frac{e^{-cs}}{s}$ אזי $F(\sigma)=\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}$. ממשפט 4.9 נקבל את הנוסחה

$$u_c(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}\frac{e^{\sigma t}e^{-c\sigma}}{\sigma}\,d\sigma,\qquad 0<t\ne c.$$

בניגוד לדוגמא הקודמת, לא נוכל להשתמש בנוסחה (4.10) בכדי לקבל חזרה את $u_c(t)$! זה משום שהפונקציה $\frac{e^{c\sigma}}{\sigma}$ אינה מקיימת את התנאי של משפט 4.10. קל לבדוק כי

$$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}\left|\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}\right|=\infty.$$

נבחר את $\sigma=s-R$, ולכן

$$\max_{\sigma\in C_R}\left|\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}\right|\ge\frac{e^{cR}e^{-cs}}{|s-R|}.$$

מאחר ו־$c>0$, הרי שאגף ימין שואף לאינסוף כאשר R שואף לאינסוף. לא נוכל להשתמש בנוסחה (4.10) בכדי למצוא את ההתמרה ההפוכה. השימוש בנוסחה זו מוביל במקרה זה לתוצאה לא נכונה. לפונקציה $\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}$ יש קוטב פשוט יחיד בנקודה $\sigma=0$, ולכן

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{\sigma t}e^{-c\sigma}}{\sigma};\sigma=0\right\}=1$$

לכל ערך של t, וזו כמובן איננה הפונקציה $u_c(t)$. דוגמא זו הובאה בכדי להזהיר את הקורא מפני שימוש לא נכון ב־(4.10).

דוגמה 29: נחשב עכשיו את התמרת לפלס ההפוכה של $F(s)=\frac{1}{s^3-1}$. ברור כי $F(\sigma)=\frac{1}{\sigma^3-1}$ ושתנאי של משפט 4.10 מתקיימים, ולכן נוכל להשתמש בנוסחה (4.10). נסמן $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)$. אזי

$$.f(t)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^3-1};\sigma_j\right\}$$

כאשר σ_1, σ_2, ... , ו־σ_n הם הקטבים של $\frac{1}{\sigma^3-1}$. כאן יש שלושה קטבים פשוטים: 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, ולגבי כל אחד מהם ניתן למצוא ש־

$$.\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^3-1};\sigma_j\right\}=\frac{e^{\sigma_j t}}{3\sigma_j^2}$$

לכן

$$f(t)=\frac{e^t}{3\cdot 1^2}+\frac{e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}}{3\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}}{3\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

על ידי חישובים נוספים נוכל לעבור לצורה הבאה של f

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{e^t}{3}+\frac{(-1+i\sqrt{3})}{6}e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}+\frac{(-1-i\sqrt{3})}{6}e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}\\&=\frac{e^t}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{aligned}$$

קיימת דרך נוספת שעושה שימוש בפירוק לשברים פשוטים בכדי למצוא את f. נשאיר את מציאתה כתרגיל לקורא.

תרגילים

1. על ידי שימוש בנוסחת ההתמרה ההפוכה, חשב את

א. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\cosh a\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right]$, $0<a<1$ **ב.** $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+s^2)^2}\right]$

ג. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3(1+s^2)}\right]$ **ד.** $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(1+s^2)^3}\right]$

ה. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s\sqrt{1+s}}\right]$ **ו.** $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{s}}{s-1}\right]$

ז. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(e^s+1)}\right]$ **ח.** $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}\right]$

4.9 תרגילים לחזרה כללית

1. תהי $f(t)=\int_0^\infty \frac{u\sin ut}{1+u^2}\,du$.

א. חשב את ההתמרת לפלס של f.
ב. חשב את f.

2. עבור קבוע $c>0$ תהי f_c הפונקציה המחזורית $2c$ בקטע $[0,\infty)$, אשר בקטע $[0,2c]$ נתונה על ידי

$$f_c(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le c\\ 2c-t, & c\le t\le 2c\end{cases}.$$

חשב את ההתמרת לפלס של f_c.

3. תהי f פונקציה כך ש- $\frac{f(t)}{t}$ רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$, וקיימים קבועים K ו־ a כך ש־

$$|f(t)|\le Kte^{at},\qquad t\ge 0.$$

הוכח שלכל $s>a$,

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s)=\int_s^\infty \mathscr{L}\left[f\right](u)\,du$$

4. הוכח כי ההתמרת לפלס של $\frac{1-e^{-t}}{t}$ שווה ל- $\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$.

5. פתור את המשוואה האינטגרלית

$$.f(t) - \frac{1}{6}\int_0^t (t-y)^3 f(y)\,dy = t^2$$

6. יהיו f ו־ g פונקציות גזירות ברציפות, כך שהן ונגזרותיהן אינטגרבילות בהחלט בקטע $[0,\infty)$, ו־ $f(0)=g(0)=0$. הוכח כי

$$.(f*g)' = f'*g = f*g'$$

7. חשב את ההתמרת לפלס של הפונקציות

א. $\int_0^t (t-y)^2 \cos 2y\,dy$ **ב.** $\int_0^t \sin(t-y)\cos y\,dy$

8. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית

$$y'' + 2y' + 2y = \sin at, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

כאשר a הוא קבוע נתון.

9. מצא את ההתמרת לפלס ההפוכה של $\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$.

10. על ידי שימוש בהתמרת לפלס, פתור את המערכות הבאות:

א.

$$\begin{cases} u_x + 2xu_t = 2x & (0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = 1 & (0 \le x < \infty) \\ u(0,t) = 1 & (0 \le t < \infty) \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} xu_x + u_t = xt & (0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = 0 & (0 \le x < \infty) \\ u(0,t) = 0 & (0 \le t < \infty) \end{cases}$$